



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUÑA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial
y Aeronáutica de Terrassa

Grado en Tecnologías Industriales

Estudio del desequilibrio de un
motor de 6 cilindros en V

Autor:

Marc Escuder Olivencia

Director:

Francisco Javier Freire Venegas

Departamento de Ingeniería Mecánica

Terrassa, Junio, 2016



Abstract

En este estudio se intenta determinar la configuración óptima de un motor de 6 cilindros en V.

En primer lugar, se estudia el comportamiento del motor monocilíndrico. Como resultado, se obtienen las fuerzas de inercia, los momentos de sacudida y del gas.

En segundo lugar, se estudian las configuraciones multicilíndricas por el procedimiento de sumar las contribuciones de cada uno de los cilindros, calculadas en el apartado anterior. Estas configuraciones son: 6 cilindros en línea, en Boxer y en V (a 60°, 90° y 120°, respectivamente).

Finalmente, se comparan los resultados llegando a la conclusión que no existe una configuración perfecta. En la práctica habrá que escoger la configuración teniendo en cuenta factores externos, como el espacio disponible en el vehículo.

"This study attempts to determine the optimal configuration of a 6-cylinder engine in V.

First of all, the behaviour of the single cylinder engine is studied. As a result, the inertial forces are obtained, the shaking and gas moments.

Secondly, the multi-cylinder configurations are studied by the procedure of adding the contributions of each cylinder, calculated in the previous section. These configurations are: 6-cylinder inline, in Boxer and V (60°, 90° and 120°, respectively).

Finally, the results are compared came to the conclusion that there is no perfect configuration. In practice, you must choose the configuration taking into account external factors such as the available space in the vehicle."





Agradecimientos

Primero de todo, me gustaría expresar mi más sincero agradecimiento a Javier Freire Venegas, el que ha sido mi tutor durante todo el proceso. Por su esfuerzo y dedicación, sus orientaciones y conocimientos, una participación inestimable no solo en el desarrollo de este estudio sino también en mi aprendizaje y formación como futuro ente profesional.

A mi familia, en especial a mis padres y hermana, por inculcarme durante toda mi vida unos valores, una educación y ser un apoyo incondicional. De ellos aprendí el significado de la responsabilidad y el trabajo, y les estoy profundamente agradecido de las oportunidades que me han brindado.

Por último, y no menos importante, a mis compañeros de estudio y amigos, quienes me han acompañado todo este tiempo recordándome lo realmente importante en los momentos difíciles.

A todos ellos, muchas gracias.



ÍNDICE DE CONTENIDO

DOCUMENTO 1 MEMORIA	11
1. Objetivo	12
2. Alcance	12
3. Requerimientos.....	13
4. Justificación	13
5. Antecedentes	13
6. Estudio teórico sobre la dinámica de motores	15
6.1. Cinemática del mecanismo biela-manivela.....	18
6.2. Masas equivalentes.....	25
6.3. Estudio teórico de fuerzas y pares de inercia en un monocilindro.....	28
6.3.1. Fuerzas de inercia y de sacudimiento	28
6.3.2. Pares de torsión de inercia y de sacudimiento	31
6.4. Estudio teórico de fuerzas y pares de gas de un monocilindro	35
6.5. Superposición.....	38
6.6. Volantes de inercia	40
6.7. Equilibrado del motor monocilíndrico	41
7. Simulación numérica del sistema	44
7.1. Cinemática del mecanismo.....	44
7.2. Modelo de masas equivalentes	45
7.3. Elaboración del libro de Excel	47
7.4. Obtención del momento de gas mediante ENGINE	48
7.5. Análisis de la simulación monocilíndrica.....	50
8. Aplicación de la simulación numérica.....	56
8.1. Estudio de 6 cilindros en línea.....	57
8.1.1. Fuerzas de sacudimiento en un motor en línea.....	59
8.1.2. Par de torsión de inercia en un motor en línea	61
8.1.3. Momento de sacudimiento en un motor en línea	62
8.2. Estudio de 6 cilindros opuestos	64
8.2.1. Descripción de los aspectos generales	64
8.2.2. Ventajas e inconvenientes de configuraciones de cilindros opuestos.....	65
8.2.3. Desarrollo de la simulación	67
8.3. Estudio de 6 cilindros en V	70
8.3.1. Introducción a los aspectos generales	70

8.3.2. Ecuaciones que definen las fuerzas y los momentos	71
8.3.3. Consideraciones para la simulación	75
9. Análisis de los resultados obtenidos	79
9.1. Evaluación del motor de 6 cilindros en línea.....	79
9.2. Evaluación del motor de 6 cilindros Boxer	82
9.3. Evaluación del motor de 6 cilindros en V	83
9.3.1. Ángulo de la V a 60°	83
9.3.2. Ángulo de la V a 90°	86
9.3.3. Ángulo de la V a 120°	89
9.4. Propuesta del ángulo óptimo de la V	91
10. Posibles desarrollos futuros	96
11. Aspectos medioambientales	97
12. Bibliografía.....	98
12.1. Páginas web consultadas	98
12.2. Libros consultados.....	99
DOCUMENTO 2 ANEXOS.....	101
1. Expresiones exactas.....	102
2. Validación de la precisión de las expresiones	103
3. Cálculo alternativo del momento del gas.....	104
4. Hojas de cálculo con Excel para las simulaciones	106
4.1. Simulación numérica de un cilindro	106
4.2. Simulación de 6 cilindros en línea	106
4.3. Simulación de 6 cilindros opuestos o Boxer.....	106
4.4. Simulación de 6 cilindros en V.....	106

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 1: Sección transversal de un motor en V con sus componentes.....	15
Fig. 2: Descripción de las partes de un cigüeñal	16
Fig. 3: Descripción de la geometría del mecanismo	19
Fig. 4: Diagramas de sólido libre de los componentes del mecanismo.....	19
Fig. 5: Representación de las funciones de posición, velocidad y aceleración considerando tan solo las componentes primarias y secundarias	25
Fig. 6: Modelos dinámicos de masa concentrada de una biela.	26
Fig. 7: Modelo de masa concentrada de una manivela.	27
Fig. 8: Modelo dinámico del mecanismo	28
Fig. 9: Diagrama de sólido libre del modelo dinámico de masa concentrada con la dirección, sentido y magnitud de las diversas componentes	29
Fig. 10: Triángulo de fuerzas	31
Fig. 11: Función del par de torsión de un ciclo Otto de 4T	35
Fig. 12: Variación de la forma y magnitud del par de torsión total en función de la velocidad de giro del motor.	39
Fig. 13: Par de torsión de volante en función de las revoluciones del motor.	40
Fig. 14: Manivela exactamente balanceada y efectos sobre la fuerza de sacudimiento.	42
Fig. 15: Manivela sobrebalanceada y efecto sobre la fuerza de sacudimiento. (Norton, Robert L. (2005) Diseño de Maquinaria)	43
Fig. 16: Representación de la posición, velocidad y aceleración con ENGINE.....	45
Fig. 17: Diagrama conceptual del descentramiento de un cilindro.....	46
Fig. 18: Introducción de datos en el programa ENGINE	48
Fig. 19: Extracción de los datos deseados	49
Fig. 20: Configuraciones diversas de motores multicilíndricos	56
Fig. 21: Cigüeñal de un motor de cuatro cilindros en línea con pistones, cigüeñal y volante.....	57
Fig. 22: Motor de 6 cilindros en línea y su orden de encendido.....	58
Fig. 23: Esquema del momento de sacudimiento.....	62
Fig. 24: Esquema sobre un motor de 6 cilindros con V a 180° y bóxer, respectivamente	64
Fig. 25: Esquema de un motor boxer de 6 cilindros	67
Fig. 26: Dibujo del motor representando las distancias del cigüeñal y los ejes de referencia.....	69
Fig. 27: Esquema de la geometría de un motor en V	71
Fig. 28: Representación de dos bielas en un mismo codo del cigüeñal.....	75
Fig. 29: Cigüeñal de un motor de seis cilindros en V.....	75
Fig. 30: Motor en V a 90°	92

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Dimensiones y masas del mecanismo de estudio.	45
Tabla 2: Valores de las masas concentradas.....	46
Tabla 3: Diagrama de fase de un motor de 6 cilindros en línea.....	58
Tabla 4: Balanceo de las fuerzas de sacudimiento	60
Tabla 5: Resumen de las ventajas e inconvenientes de los motores bóxer.....	66
Tabla 6: Diagrama de fase del motor Boxer de 6 cilindros	68
Tabla 7: Diagrama de fase de un motor de 6 cilindros en V a 60°	77
Tabla 8: Diagrama de fase de un motor de 6 cilindros en V a 90°	77
Tabla 9: Diagrama de fase de un motor de 6 cilindros en V a 120°	77
Tabla 10: Cuadro resumen de los resultados de las simulaciones.....	95
Tabla 11: Impacto medioambiental	97

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Representación de los parámetros cinemáticos.....	44
Gráfico 2: Representación de las componentes de las fuerzas de inercia.....	50
Gráfico 3: Representación de las componentes de los momentos de sacudida	51
Gráfico 4: Representación de la fuerza del gas durante un ciclo.....	53
Gráfico 5: Representación de las componentes del momento del gas	53
Gráfico 6: Representación de las fuerzas de inercia totales en el eje X bajo tres regímenes distintos.....	54
Gráfico 7: Representación de las fuerzas de inercia totales en el eje Y bajo tres regímenes distintos.....	54
Gráfico 8: Representación de los momentos de sacudida totales bajo tres regímenes distintos	55
Gráfico 9: Representación de los momentos del gas totales bajo tres regímenes distintos	55
Gráfico 10: Representación del tercer armónico del momento de sacudimiento total para un motor de 6 cilindros en línea	80
Gráfico 11: Representación de los momentos del gas para un motor de 6 cilindros en línea.....	80
Gráfico 12: Representación de los momentos del gas para una V a 60°	83
Gráfico 13: Momentos de las fuerzas de inercia en el plano horizontal para una V a 60° y 800 rpm.....	84
Gráfico 14: Momentos de las fuerzas de inercia en el plano vertical para una V a 60° y 800 rpm	84
Gráfico 15: Momentos de las fuerzas de inercia de una V a 60°	85
Gráfico 16: Representación de los momentos del gas para una V a 90°	86
Gráfico 17: Momento de sacudida de un motor 6 cilindros en V a 90°	87
Gráfico 18: Momentos de las fuerzas de inercia en el plano horizontal para una V a 90° y 800 rpm.....	87
Gráfico 19: Momentos de las fuerzas de inercia en el plano vertical para una V a 90° y 800 rpm	88
Gráfico 20: Momentos de las fuerzas de inercia de una V a 90°	88
Gráfico 21: Momentos de las fuerzas de inercia en el plano horizontal para una V a 120° y 800 rpm	89
Gráfico 22: Momentos de las fuerzas de inercia en el plano vertical para una V a 120° y 800 rpm.....	90
Gráfico 23: Momentos de las fuerzas de inercia de una V a 120°	90
Gráfico 24: Momentos plano horizontal de las fuerzas inerciales a 3.500 rpm	93
Gráfico 25: Momentos plano vertical de las fuerzas inerciales a 3.500 rpm	94
Gráfico 26: Representación del par motor para un motor de 6 cilindros en línea y Boxer	105
Gráfico 27: Representación del par motor para un motor de 6 cilindros en V a 60°... 105	
Gráfico 28: Representación del par motor para un motor de 6 cilindros en V a 90°... 105	
Gráfico 29: Representación del par motor para un motor de 6 cilindros en V a 120°. 105	



DOCUMENTO 1

MEMORIA

1. Objetivo

Estudiar el desequilibrio de un motor de 6 cilindros en V, teniendo en cuenta las fuerzas de inercia y las fuerzas debidas a la expansión adiabática de los gases resultantes de la combustión.

Explorar el efecto de las diferentes geometrías (ángulo de la V) a diferentes rangos del motor (ralentí, $\frac{1}{2}$ de potencia, potencia máxima) y sacar conclusiones sobre la mejor solución.

2. Alcance

Los diferentes puntos que conforman el alcance de este estudio son los siguientes:

- Se realizará un estudio teórico de las fuerzas y los pares en función del ángulo y la velocidad de giro del cigüeñal para un motor monocilíndrico.
- Estudio teórico de las fuerzas y los pares en función de la expansión de los gases en la cámara de combustión para un motor monocilíndrico.
- Desarrollar una simulación numérica, aplicando los resultados anteriores, que permita encontrar el desequilibrio del motor de estudio grado a grado. Esta simulación estará basada en el modelo del motor monocilíndrico que será el componente fundamental del modelo multicilíndrico.
- Aplicación de la simulación a un motor de 6 cilindros en línea.
- Aplicación de la simulación a un motor de 6 cilindros opuestos.
- Aplicación de la simulación para un motor de 6 cilindros en V variando el ángulo de la V.
- Evaluar los resultados de la simulación y proponer un ángulo óptimo de la V.

Por otro lado, aparecen una serie de limitaciones o acotaciones sobre dicho estudio:

- En el estudio no se tendrán en cuenta las variaciones de la velocidad de giro, ya que se supondrá que el volante de inercia las hará muy pequeñas.
- Se supondrán que todos los elementos que conforman el motor serán sólidos rígidos.

3. Requerimientos

Al tratarse de un estudio no aparece ningún tipo de especificación técnica, legal o económica a cumplir. Sin embargo, hay que remarcar que el estudio se realizará utilizando los programas disponibles en la Universidad Politécnica de Cataluña.

4. Justificación

El trasfondo de este proyecto es encontrar la mejor distribución de cilindros en motores de combustión interna, considerando diversos aspectos.

En la industria del motor, siempre en auge, se destinan numerosos recursos en estos campos, para el estudio en profundidad de su comportamiento. Con el análisis de los resultados obtenidos, se pretende conocer el funcionamiento exacto y poder tomar decisiones acertadas a la hora de lanzar nuevos productos o mejorar los existentes.

A nivel de fabricantes, algunos de ellos realizan montajes de la V de unos 60° y otros de unos 90° . Por tanto, se pretende conocer los pros y los contras de estos montajes.

La mejora constante parte del conocimiento y permite aumentar la fiabilidad y la durabilidad de los motores, ya que el correcto equilibrado de un motor de combustión evita vibraciones, fatiga de los componentes... en definitiva factores que juegan en contra de la vida útil del conjunto.

Por último, se encuentra la motivación de obtener la mayor optimización mecánica, en la medida de lo posible, de un motor de 6 cilindros en V. Por este motivo, es primordial realizar el estudio de su desequilibrio y poder sacar conclusiones sobre este tipo de montajes.

5. Antecedentes

El equilibrado de motores siempre ha sido un punto de gran relevancia para el diseño de estos mecanismos de combustión interna. El principal objetivo es lograr configuraciones que cuando funcionen en régimen estacionario lo hagan de la manera más suave posible. Por suave se entiende generar el mínimo de vibraciones y tensiones.

Un buen diseño garantiza:

- Aumento de la vida útil de los componentes del motor, al reducirse el desgaste de las piezas.
- Reducción de vibraciones; incómodas para los usuarios de los vehículos e perjudiciales para los elementos que engloban el bloque motor.
- Reducción de las exigencias a los elementos, derivando en menores secciones y mayor ligereza de los mismos.
- Aumento de la eficiencia desde el punto de vista de un mayor balance energético debido a la reducción de las tensiones.

Existen fuerzas y momentos los cuales pueden estar equilibrados o no. Todo dependerá de la configuración escogida, las dimensiones, el régimen y el ciclo de trabajo... Se intentará llegar siempre a una solución de compromiso. La relevancia de las acciones no equilibradas es relativa a su variación, magnitud y dirección.

Un modelo desequilibrado tendrá fuerzas de inercia, debidas a las masas internas con movimiento alternativo, y pares. Todos ellos varían en función del giro del cigüeñal a lo largo del ciclo. La variación de la presión sobre los soportes del bloque motor es la culpable de las vibraciones, los desgastes, las tensiones... Una situación que se puede llegar a dar, siendo más perjudicial aún, ocurre cuando la frecuencia de estas vibraciones ronda el valor de la frecuencia del sistema o de alguno de sus componentes, pudiendo entrar en resonancia y agravando las consecuencias que esto implica.

Un motor equilibrado es aquel que funcionando a régimen estacionario, las fuerzas y pares que recaen en los soportes son o bien nulas o bien constantes, en magnitud y dirección. Esto se traduce a configuraciones con un grado de desequilibrio menor a una tolerancia determinada. Los medios para lograr este equilibrado son: una elección adecuada del número de cilindros, su distribución y los codos del cigüeñal. Otra opción sería el uso de contrapesos o masas balanceadoras. Otra posible fuente de vibraciones puede proceder del proceso de fabricación de los componentes, por eso es importante controlar las tolerancias de masa y dimensiones. En este estudio se analizarán las distribuciones comúnmente extendidas en el mercado, es decir, las más usadas por los fabricantes, ya sea BMW con sus míticos 6 cilindros en línea, Subaru o Porsche con los motores Boxer o la Fórmula 1 con motores en V, entre otros.

Partiendo del hecho que no es posible equilibrar completamente un motor de combustión, en el diseño es importante la elección de la mejor solución, una de compromiso, que tenga en cuenta tanto fuerzas y pares generados, como otros factores como el tamaño del motor, el desgaste de sus componentes, el peso del bloque, la potencia suministrada, etc. Favorecer alguno de estos puntos, puede significar el empeoramiento de otros. A la hora de estudiar estos desequilibrios, en ningún caso se llegan a estudiar los efectos provocados por estas vibraciones.

6. Estudio teórico sobre la dinámica de motores

En este apartado se determinarán las fuerzas y los pares para un motor monocilíndrico de combustión interna. El estudio partirá de un dispositivo que presenta una mayor sencillez, ya que dicho mecanismo es mucho más complejo de lo que aparenta ser. Se asemejará el comportamiento a un mecanismo de biela-manivela. Será necesario partir de un conjunto de consideraciones dinámicas para establecer su diseño, y de este modo simplificar el conjunto según los intereses de estudio.

Se realizará una pequeña introducción sobre los aspectos generales, funcionamiento, partes... de los motores de combustión interna con tal de situarse en la materia.

Un motor de combustión interna consta de muchas partes, tanto móviles como fijas, cada una de ellas con una función determinada. Este estudio se centrará en las partes móviles principales del mecanismo; una manivela, una biela y un pistón. En la figura que se adjunta a continuación se pueden observar los componentes que conforman un motor de combustión interna convencional, en este caso en concreto se trata de 6 cilindros en V, el cual es la principal configuración a tratar en este estudio.

Un motor de combustión alternativo es un mecanismo cuya finalidad es obtener energía mecánica a partir de energía química. Este concepto, aplicado al sector de la automoción, se traduce en la quema de combustible con el fin de obtener la rotación de un eje y transmitir este movimiento a las ruedas motrices para desplazar el vehículo.

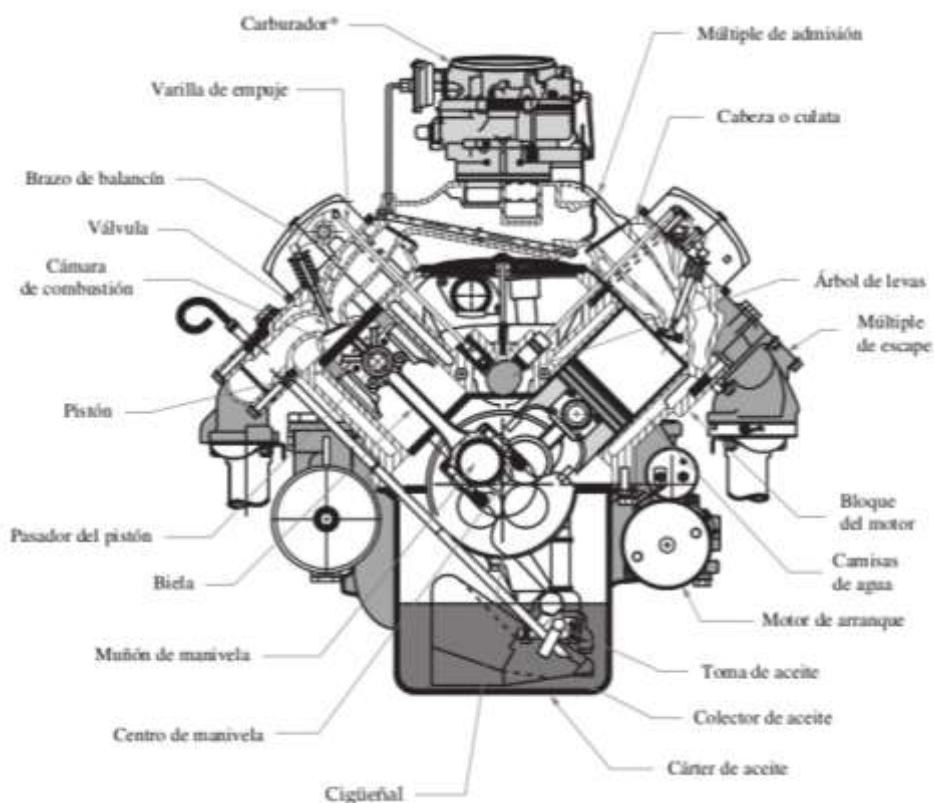


Fig. 1: Sección transversal de un motor en V con sus componentes. (Norton, Robert L. (2005) Diseño de Maquinaria)

Antes de introducir el estudio más técnico convendrá exponer las hipótesis de partida, que permitirán simplificar el modelo de trabajo. Como ya se ha comentado anteriormente, se partirá de una biela-manivela, ya que su comportamiento se asemeja al movimiento oscilatorio que realiza el conjunto de los elementos internos del motor. Se considerarán todos los elementos como sólidos rígidos, de este modo no se tendrán en cuenta las deformaciones de los diferentes elementos, al ser ínfimas se considerarán despreciables.

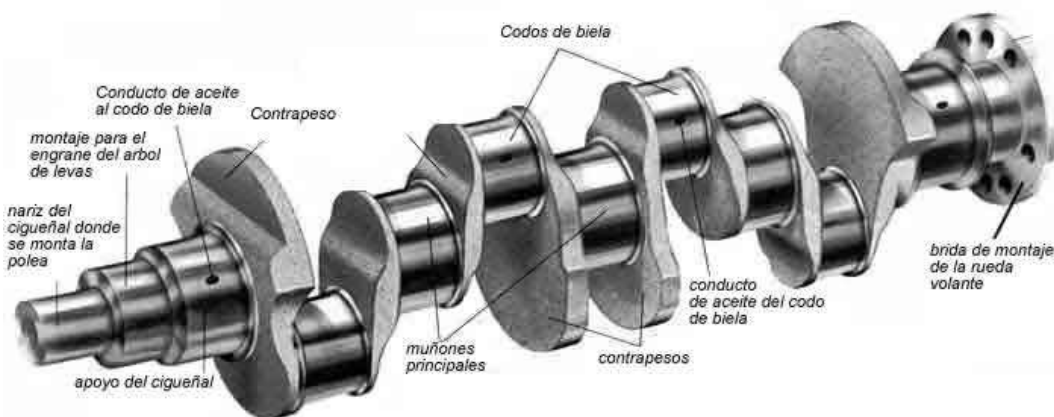


Fig. 2: Descripción de las partes de un cigüeñal. (www.fazermotos.com)

Previamente, es conveniente realizar una breve descripción sobre algunos conceptos con los que se trabajarán en este apartado:

- PMI: punto muerto inferior
- PMS: punto muerto superior
- Carrera de pistón (S): recorrido del PMS al PMI o viceversa.
- Carrera de admisión: el pistón se encuentra en el PMS inicialmente, la mezcla de aire y combustible es aspirada hacia el cilindro a medida que el pistón desciende hasta el PMI ya que se genera una presión negativa. La válvula de admisión se encuentra abierta.
- Carrera de compresión: con las válvulas cerradas, el pistón sube del PMI hacia el PMS comprimiendo la mezcla que se encuentra en el cilindro. En este punto, en los motores de gasolina se enciende una chispa o bien se produce la autoignición en los motores diesel.
- Carrera de explosión: con la explosión se produce un incremento considerable y rápido de la presión en la cámara, empujando el pistón hacia el PMI.
- Carrera de escape: la válvula de escape se abre cuando llega el PMI con la finalidad de expulsar los gases resultantes de la combustión en la siguiente carrera.

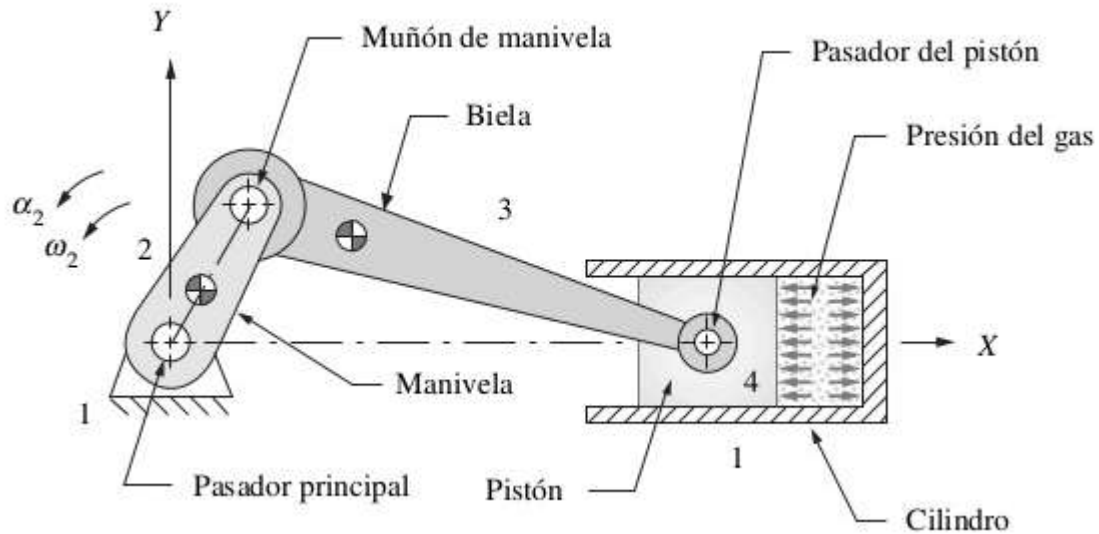


Fig. 3: Mecanismo biela-manivela. (Norton, Robert L. (2005) Diseño de Maquinaria)

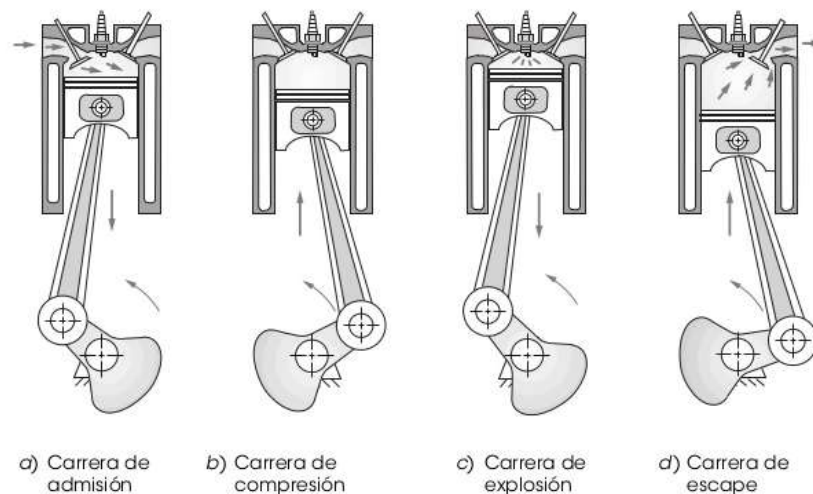


Fig. 4: Ciclo Otto de combustión de cuatro tiempos. (Norton, Robert L. (2005) Diseño de Maquinaria)

- Pasador principal: punto de unión de la manivela con el punto fijo del mecanismo.
- Muñón de manivela: punto de unión entre la manivela y la biela
- Pasador del pistón: punto de unión entre la biela y el pistón.

El estudio se realizará sobre un motor de cuatro tiempos o ciclo de Otto. La característica principal es que se necesitan cuatro carreras completas del pistón para completar dicho ciclo, o lo que es lo mismo, dos carreras por cada 360° de revolución de la manivela del mecanismo. De este modo, para un ciclo de cuatro tiempos el cigüeñal del motor rotará 720° .

Dentro de los motores de 4T, podemos diferenciar el ciclo Diesel en el cual el ciclo de encendido se produce por la compresión de la mezcla aire-combustible. Por tanto, a diferencia de los motores de gasolina convencionales, no es necesaria una chispa en la cámara de combustión para iniciar la explosión sino que el calor de la compresión es el causante de la ignición. Durante el ciclo de compresión del aire que entra a través de la válvula o válvulas de admisión se comprime en el cilindro con la subida del pistón hasta alcanzar una elevada presión (si se compara con el factor de compresión en motores de encendido por chispa que es de 8 a 10, en los motores diésel se llega hasta 14 o 15, tomando valores aproximados). A continuación, mediante un inyector se introduce el combustible de baja volatilidad en la cámara justo antes del PMS y se produce su ignición y la expansión correspondiente de los gases.

Como aspectos generales de los motores de ciclo diésel, estos presentan un mayor peso y volumen, necesarios para soportar dichas presiones internas, en comparación a motores de gasolina que suministren las mismas prestaciones de potencia.

La principal finalidad de este apartado, de estudio dinámico y geométrico de un solo cilindro, es la base necesaria para realizar diferentes configuraciones multicilíndricas.

Respecto al origen de las fuerzas de inercia y momentos que aparecen en esta configuración, se establecerá un estudio según su origen; bien provengan de la inercia o de la expansión de los gases en la cámara de combustión. A continuación aparecen dichos apartados.

6.1. Cinemática del mecanismo biela-manivela

Dentro de la cinemática, se partirá del mecanismo de manivela-corredera convencional como base para el estudio. A partir de este modelo, se podrán obtener las expresiones que relacionan la posición, la velocidad y la aceleración del mecanismo. Al trabajar con este mecanismo como base la aproximación del análisis es precisa y relativamente simple, al trabajar con trigonometría plana y escalares.

Se partirán de una serie de hipótesis sobre el sistema:

- El movimiento de la corredera será sobre el eje de las x.
- El eje de deslizamiento pasa por el pivote de la manivela, por lo que es un mecanismo no descentrado.
- No hay componente de la aceleración de Coriolis, puesto que la corredera se presenta un movimiento de traslación con respecto al plano de la bancada que es estacionaria.
- Se supondrá en todo momento que ω es constante.

Primeramente, se conviene a definir algunos parámetros de trabajo:

$r = \text{radio de la manivela}$

$l = \text{longitud de la vuela}$

$\theta = \omega \cdot t = \text{ángulo de la manivela}$

$\phi = \text{ángulo biela con el eje } x$

$\omega = \text{velocidad angular de la manivela}$

$x = \text{posición del pistón}$

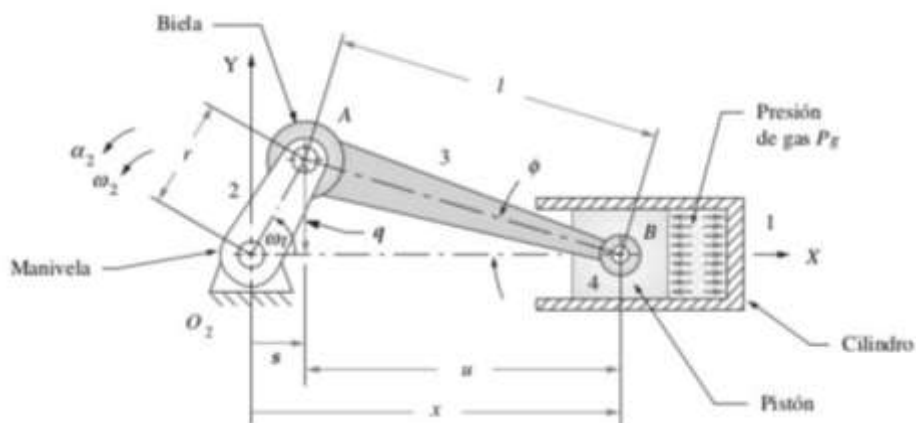


Fig. 3: Descripción de la geometría del mecanismo. (Norton, Robert L. (2005) Diseño de Maquinaria)

A partir de la geometría del mecanismo de estudio, se pueden obtener los diagramas de fuerzas para cada sólido rígido que compone el conjunto:

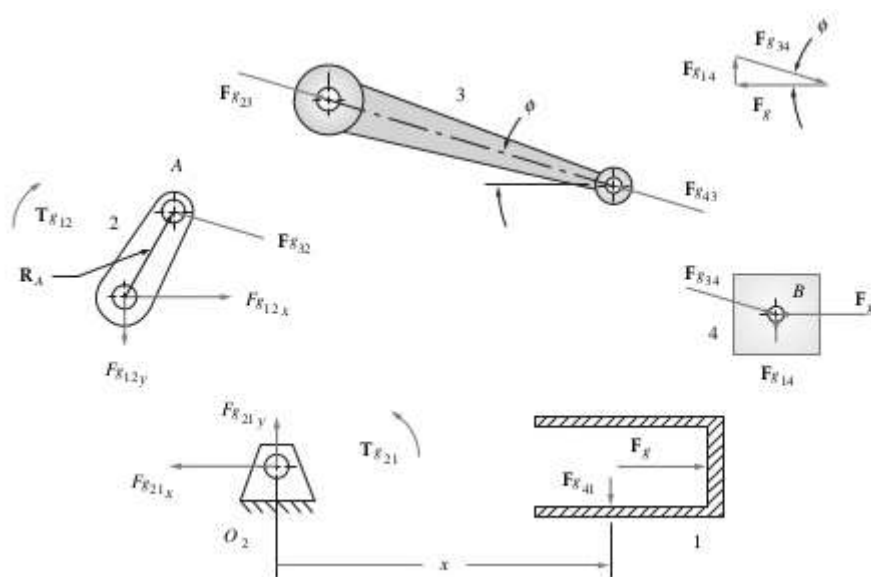


Fig. 4: Diagramas de sólido libre de los componentes del mecanismo. (Norton, Robert L. (2005) Diseño de Maquinaria)

Partiendo del esquema anterior se obtienen las expresiones:

$$\theta = \omega \cdot t$$

$$q = r \sin \theta = l \sin \phi \rightarrow \sin \phi = \frac{r}{l} \sin \omega t$$

$$x = s + u = r \cos \omega t + l \cos \phi$$

Aplicando la propiedad trigonométrica de:

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \sin^2 \phi} = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \omega t\right)^2}$$

Por lo que se encuentra la expresión de la posición del pistón y derivando respecto el tiempo se pueden encontrar las expresiones de la velocidad y la aceleración que se buscaban:

$$x = r \cos \omega t + l \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \omega t\right)^2}$$

$$\dot{x} = -r\omega \left[\sin \omega t + \frac{\frac{r}{2l} \sin 2\omega t}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \omega t\right)^2}} \right]$$

$$\ddot{x} = -r\omega^2 \left\{ \cos \omega t - \frac{r[l^2(1 - 2 \cos^2 \omega t) - r^2 \sin^4 \omega t]}{[l^2 - (r \sin \omega t)^2]^{3/2}} \right\}$$

Debido a la alta complejidad de las expresiones de velocidad y aceleración obtenidas a partir de la derivación de la posición, se recurre a una simplificación numérica de la primera. Dicha simplificación matemática viene dada al recurrir al teorema binomial y obtener así expresiones más sencillas a la hora de trabajar. La expresión básica del teorema binomial de Newton se presenta a continuación:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} x^{n-k} y^k$$

Aplicada al radical de la ecuación de la posición y realizando la correspondiente expansión hasta términos que proporcionen una elevada precisión con respecto al comportamiento real del sistema, se obtiene que:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \omega t\right)^2} = \left[1 - \left(\frac{r}{l} \sin \omega t\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{l} \sin \omega t \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{r}{l} \sin \omega t \right)^4 - \frac{1}{16} \left(\frac{r}{l} \sin \omega t \right)^6 - \frac{5}{128} \left(\frac{r}{l} \sin \omega t \right)^8 + \dots$$

Una vez se ha llegado a este punto, se aplican conocimientos sobre la geometría del sistema, dónde la relación r/l adquiere un valor muy relevante. Para un funcionamiento óptimo. La mayoría de estos sistemas de biela-manivela presentan una relación r/l entre $1/3$, como valor límite, y $1/5$, garantizando así el funcionamiento uniforme.

Cabe destacar que si se eliminan los términos posteriores del segundo, al substituir en la expresión de la posición el error sería del orden del uno por ciento. Con el fin de observar el comportamiento exacto del sistema, se tendrán en cuenta el efecto de los términos posteriores.

$$x = r \cos \omega t + l \left[1 - \left(\frac{r^2}{2l^2} \right) \sin^2 \omega t + \left(\frac{r^4}{8l^4} \right) \sin^4 \omega t - \left(\frac{r^6}{16l^6} \right) \sin^6 \omega t \right]$$

Para evitar resultados indeseados, se realizará el proceso invirtiendo el orden; primero se realizará la correspondiente derivación respecto del tiempo, suponiendo la velocidad de giro constante, para luego llevar a cabo las simplificaciones adecuadas utilizando las expansiones de los binomios de Newton.

Los diferentes binomios que aparecerán durante el desarrollo de las ecuaciones que definen la posición, velocidad y aceleración del pistón son los que se detallan a continuación, siguiendo una numeración particular para cada uno de ellos. Cuando estos términos aparezcan en alguna expresión, se substituirá por su expansión binomial. Se truncarán las expansiones en el quinto grado, pudiendo asumir así un error ínfimo, tal y como se comprobará finalmente. La herramienta usada para realizar los cálculos de estas expresiones es Maple.

$$> \text{Expr1} := \sin(\phi) = \frac{r}{l} \cdot \sin(\theta);$$

$$\text{Expr1} := \sin(\phi) = \frac{r \sin(\theta)}{l}$$

$$> \phi := \arcsin\left(\frac{r \sin(\theta)}{l}\right);$$

$$\phi := \arcsin\left(\frac{r \sin(\theta)}{l}\right)$$

$$> \cos(\phi);$$

$$\sqrt{1 - \frac{r^2 \sin^2(\theta)}{l^2}}$$

$$> a := 1; b := -\frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2};$$

$$a := 1$$

$$b := -\frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2}$$

$$> n := -\frac{1}{2};$$

$$n := -\frac{1}{2}$$

$$> \text{binomi1} := a^n + n \cdot a^{(n-2)} \cdot b + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot a^{(n-2)} \cdot b^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} \cdot a^{(n-3)} \cdot b^3 \\ + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4!} \cdot a^{(n-4)} \cdot b^4;$$

$$\text{binomi1} := 1 + \frac{1}{2} \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2} + \frac{3}{8} \frac{r^4 \sin(\theta)^4}{l^4} + \frac{5}{16} \frac{r^6 \sin(\theta)^6}{l^6} + \frac{35}{128} \frac{r^8 \sin(\theta)^8}{l^8}$$

$$> n := -\frac{3}{2};$$

$$n := -\frac{3}{2}$$

$$> \text{binomi2} := a^n + n \cdot a^{(n-2)} \cdot b + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot a^{(n-2)} \cdot b^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} \cdot a^{(n-3)} \cdot b^3 \\ + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4!} \cdot a^{(n-4)} \cdot b^4;$$

$$\text{binomi2} := 1 + \frac{3}{2} \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2} + \frac{15}{8} \frac{r^4 \sin(\theta)^4}{l^4} + \frac{35}{16} \frac{r^6 \sin(\theta)^6}{l^6} + \frac{315}{128} \frac{r^8 \sin(\theta)^8}{l^8}$$

$$> n := -1;$$

$$n := -1$$

$$> \text{binomi3} := a^n + n \cdot a^{(n-1)} \cdot b + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot a^{(n-2)} \cdot b^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} \cdot a^{(n-3)} \cdot b^3 \\ + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4!} \cdot a^{(n-4)} \cdot b^4;$$

$$\text{binomi3} := 1 + \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2} + \frac{r^4 \sin(\theta)^4}{l^4} + \frac{r^6 \sin(\theta)^6}{l^6} + \frac{r^8 \sin(\theta)^8}{l^8}$$

$$> n := -2;$$

$$n := -2$$

$$> \text{binomi4} := a^n + n \cdot a^{(n-1)} \cdot b + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot a^{(n-2)} \cdot b^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{2 \cdot 3} \cdot a^{(n-3)} \cdot b^3 \\ + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4!} \cdot a^{(n-4)} \cdot b^4;$$

$$\text{binomi4} := 1 + \frac{2r^2 \sin(\theta)^2}{l^2} + \frac{3r^4 \sin(\theta)^4}{l^4} + \frac{4r^6 \sin(\theta)^6}{l^6} + \frac{5r^8 \sin(\theta)^8}{l^8}$$

Por último solo quedará derivar la expresión que por trigonometría se ha obtenido de la posición x del pistón para cada instante de tiempo:

$$> x := r \cdot \cos(\theta) + l \cdot \cos(\phi);$$

$$x := r \cos(\theta) + l \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2}}$$

$$> v := \text{diff} \left(r \cos(\theta(t)) + l \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin(\theta(t))^2}{l^2}}, t \right);$$

$$v := -r \sin(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right) - \frac{r^2 \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)}{l \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin(\theta(t))^2}{l^2}}}$$

$$> a := \text{diff} \left(r \cos(\theta(t)) + l \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin(\theta(t))^2}{l^2}}, t, t \right);$$

$$a := -r \cos(\theta(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2 - r \sin(\theta(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right) \\ - \frac{r^4 \sin(\theta(t))^2 \cos(\theta(t))^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2}{l^3 \left(1 - \frac{r^2 \sin(\theta(t))^2}{l^2} \right)^{3/2}} - \frac{r^2 \cos(\theta(t))^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2}{l \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin(\theta(t))^2}{l^2}}} \\ + \frac{r^2 \sin(\theta(t))^2 \left(\frac{d}{dt} \theta(t) \right)^2}{l \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin(\theta(t))^2}{l^2}}} - \frac{r^2 \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta(t) \right)}{l \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin(\theta(t))^2}{l^2}}}$$

Para poder visualizar mejor el efecto de cada componente en la fórmula de la aceleración, se substituyen algunos términos por los que se usarán posteriormente en la simulación. Al considerar una velocidad constante, consecuentemente la aceleración angular será nula. Se obtiene, por tanto la expresión final que define la aceleración del pistón:

> $aB := \text{subs}(\theta(t) = \theta, aB);$

$$aB := -r\omega^2 \cos(\theta) - \frac{r^4 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^2 \omega^2}{l^3 \left(1 - \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2}\right)^{3/2}} - \frac{r^2 \cos(\theta)^2 \omega^2}{l \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2}}} + \frac{r^2 \sin(\theta)^2 \omega^2}{l \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2}}}$$

Una vez en este punto, ya se puede proceder a realizar la sustitución de los binomios antes calculados. Por este motivo, se denomina aceleración del pistón, o según el diagrama, del punto B, aproximada, ya que se introducen las expansiones que la simplificarán. Con ayuda de Maple, se expresará la aceleración en función de los ángulos múltiples.

$$> aB_{\text{aprox}} := -\frac{\text{binomi1} \cdot r^2 \omega^2 \cos(\theta)^2}{l} + \frac{\text{binomi1} \cdot r^2 \omega^2 \sin(\theta)^2}{l} - \frac{\text{binomi2} \cdot r^4 \omega^2 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^2}{l^3} - r\omega^2 \cos(\theta);$$

$$aB_{\text{aprox}} := -\frac{1}{l} \left(\left(1 + \frac{1}{2} \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2} + \frac{3}{8} \frac{r^4 \sin(\theta)^4}{l^4} + \frac{5}{16} \frac{r^6 \sin(\theta)^6}{l^6} + \frac{35}{128} \frac{r^8 \sin(\theta)^8}{l^8} \right) r^2 \omega^2 \cos(\theta)^2 \right) + \frac{1}{l} \left(\left(1 + \frac{1}{2} \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2} + \frac{3}{8} \frac{r^4 \sin(\theta)^4}{l^4} + \frac{5}{16} \frac{r^6 \sin(\theta)^6}{l^6} + \frac{35}{128} \frac{r^8 \sin(\theta)^8}{l^8} \right) r^2 \omega^2 \sin(\theta)^2 \right) - \frac{1}{l^3} \left(\left(1 + \frac{3}{2} \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2} + \frac{15}{8} \frac{r^4 \sin(\theta)^4}{l^4} + \frac{35}{16} \frac{r^6 \sin(\theta)^6}{l^6} + \frac{315}{128} \frac{r^8 \sin(\theta)^8}{l^8} \right) r^4 \omega^2 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)^2 \right) - r\omega^2 \cos(\theta)$$

Finalmente, tan solo se trabajará con los términos más relevantes de esta función, los cuales son los cinco primeros armónicos que definen esta aceleración. En el apartado de *ANEXOS: 1. Expresiones exactas* queda claramente definido todo el proceso utilizado para lograr estos resultados. Además, en el punto 2. *Validación de la precisión de las expresiones* se detalla el porqué de esta elección de la longitud de la función que la define con mayor precisión.

$$aB_{\text{aprox5}} := -r\omega^2 \cos(\theta) + \frac{1}{262144} \frac{1}{l^{11}} \left((-262144 l^{10} \omega^2 r^2 - 65536 l^8 \omega^2 r^4 - 30720 l^6 \omega^2 r^6 - 17920 l^4 \omega^2 r^8 - 11760 l^2 \omega^2 r^{10} + 15120 \omega^2 r^{12}) \cos(2\theta) \right) + \frac{1}{262144} \frac{1}{l^{11}} \left((65536 l^8 \omega^2 r^4 + 49152 l^6 \omega^2 r^6 + 35840 l^4 \omega^2 r^8 + 26880 l^2 \omega^2 r^{10} + 4725 \omega^2 r^{12}) \cos(4\theta) \right) :$$

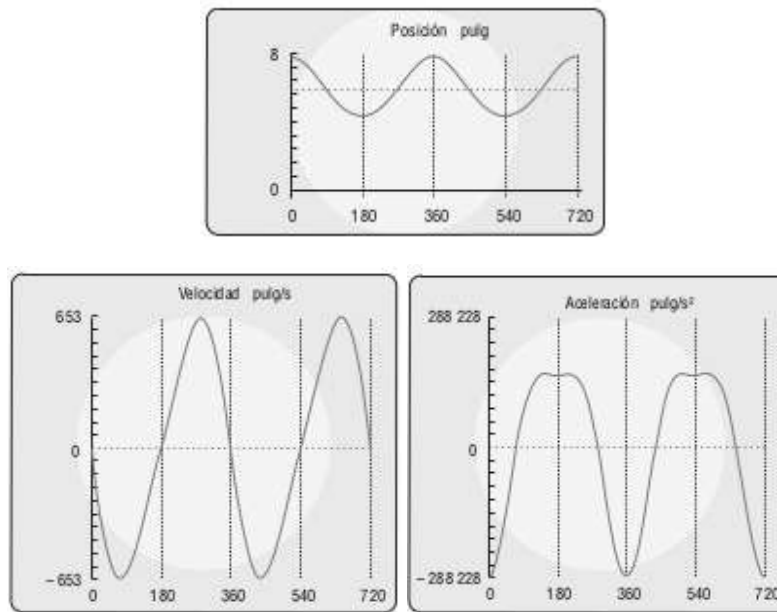


Fig. 5: Representación de las funciones de posición, velocidad y aceleración considerando tan solo las componentes primarias y secundarias. (Norton, Robert L. (2005) Diseño de Maquinaria)

6.2. Masas equivalentes

Antes de entrar en profundidad al estudio de fuerzas y momentos, es conveniente la definición de algunos parámetros geométricos del modelo de estudio. Se considera una manivela que presenta una rotación pura y un pistón con translación pura sobre el eje de la x . Sin entrar dentro de la geometría ni los materiales de los elementos del sistema, se determinarán sus movimientos cinemáticos. Para el caso del pistón, estas expresiones ya se han definido en el apartado anterior.

Respecto a la biela, esta presenta un movimiento compuesto complejo, lo que conlleva a determinar la aceleración lineal del centro de gravedad. La biela se considera como dos masas puntuales, situadas en el pasador con la manivela y la otra en el pasador con el pistón. De este modo se puede llegar a determinar con facilidad el movimiento de estas dos masas, una con rotación pura y la otra con traslación pura. La característica principal de estas masas puntuales es la carencia de dimensión conectadas con una barra sin masa rígida.

Para realizar un modelo con una equivalencia dinámica al elemento real de estudio es necesario establecer unos requerimientos, tales como:

- La masa del modelo debe ser igual a la del cuerpo original.
- El centro de gravedad debe estar en el mismo lugar que el original.
- El momento de inercia de masa debe ser igual al original.

Tal y como se muestra en la figura adjunta donde aparece una biela, la masa total de esta se descompone en las dos masas enunciadas anteriormente, que mantienen la equivalencia. Cada una de ellas se encuentra a una distancia característica del centro de gravedad de la biela. La demostración del cumplimiento de los requerimientos necesarios es la siguiente:

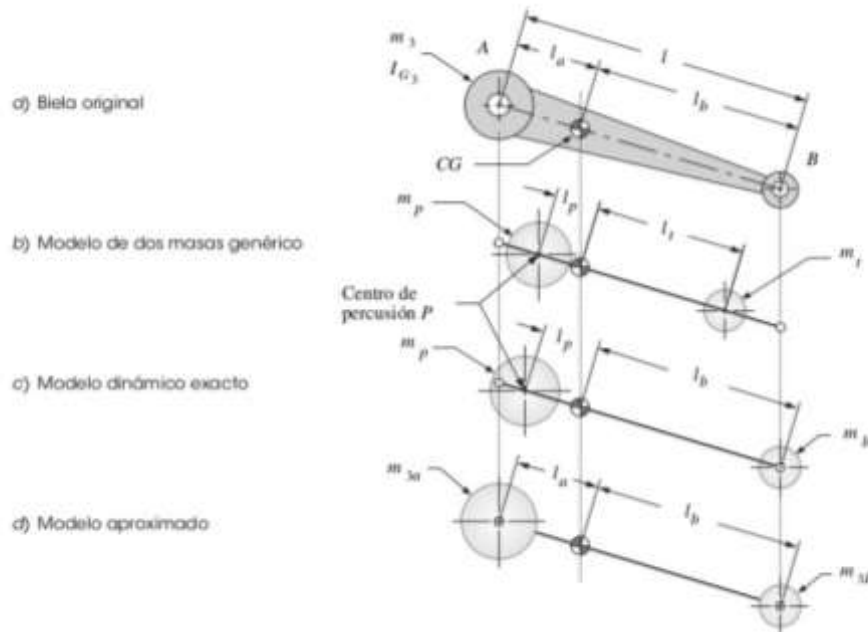


Fig. 6: Modelos dinámicos de masa concentrada de una biela. (Norton, Robert L. (2005) Diseño de Maquinaria)

$$m_3 = m_p + m_t$$

$$m_p l_p = m_t l_t$$

$$I_{G3} = m_p l_p^2 + m_t l_t^2$$

Se obtiene por tanto un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas (m_p, l_p, m_t, l_t) para resolverlo se supondrá por conveniencia:

$$l_t = l_b = \text{distancia al pasador del pistón}$$

Se obtienen pues las ecuaciones que definen las masas puntuales y substituyendo en la expresión de la inercia se encuentra:

$$m_p = \frac{m_3 l_b}{l_p + l_b}$$

$$m_b = \frac{m_3 l_p}{l_p + l_b}$$

$$I_{G3} = \frac{m_3 l_b}{l_p + l_b} l_p^2 + \frac{m_3 l_p}{l_p + l_b} l_b^3 = m_3 l_p l_b$$

$$l_p = \frac{I_{G3}}{m_3 l_b}$$

Ahora se introduce un nuevo concepto en este estudio: el centro de percusión. Este concepto se relaciona con un centro de rotación del sólido. La distancia l_p es la localización de centro de percusión del elemento, donde l_b es el centro de rotación. Para una equivalencia dinámica exacta, la masa m_p se coloca en el CP (centro de percusión).

La geometría típica de la biela de un motor presenta una mayor sección en la unión con la manivela que con el pistón. Como el CP cae entremedio del CG (centro de gravedad) y el pasador con la manivela, en el caso que esta masa m_p se situara en este extremo el error cometido sería ínfimo. Por lo tanto, reescribiendo las expresiones anteriores:

$$l_p = l_a$$

$$m_{3a} = \frac{m_3 l_b}{l_a + l_b}$$

$$m_{3b} = \frac{m_3 l_a}{l_a + l_b}$$

Estos serán los valores de las masas puntuales a colocar en cada extremo para el análisis dinámico del sistema y poder modelarlo. Si no se dispone de datos geométricos de la biela, se puede usar la aproximación de colocar 2/3 de la masa total en el extremo con la manivela y 1/3 en el extremo del pistón. Por lo que respecta a la manivela, se realizará también un modelo con masas puntuales equivalentes. La manivela presenta su CG a una distancia r_{G2} del punto O_2 respecto al cual gira con una ω constante para un modelo estático.

Dicho análisis estático es gracias a que la aceleración angular es nula ($\alpha = 0$) y $T = \alpha I$ también lo será, por lo tanto, el valor de la inercia será indiferente. Los requerimientos para esta equivalencia estática son:

- La masa del modelo debe ser igual a la del cuerpo original.
- El CG debe estar en el mismo lugar que en el original.

Se volverá a modelar con una masa puntual en el punto A de unión con la biela y otra masa en el pivote O_2 .

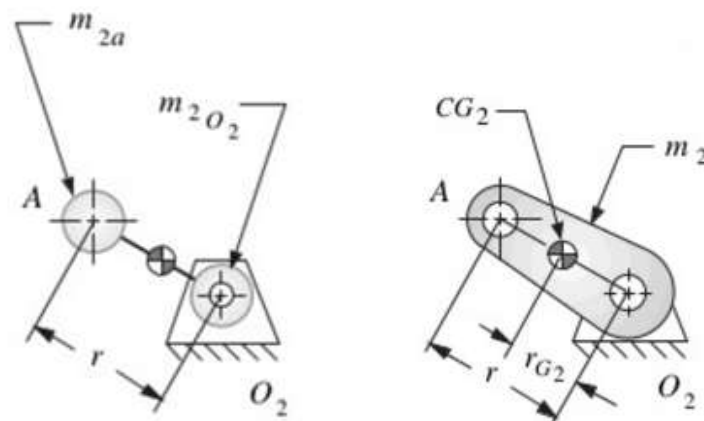


Fig. 7: Modelo de masa concentrada de una manivela. (Norton, Robert L. (2005) Diseño de Maquinaria)

$$m_2 = m_{2a} + m_{2O_2}$$

$$m_{2a}r = m_{2O_2}r_{G_2}$$

Solo será necesario conocer la masa en el punto A de la manivela, ya que la que se sitúa en el punto O_2 no es necesario conocerla porque este punto es estacionario.

$$m_{2a} = \frac{m_2 R_{G_2}}{r}$$

Ahora ya se puede englobar todo el mecanismo biela-manivela. Este queda representado en la figura siguiente, donde se encuentran las masas en los puntos A y B, halladas antes por separado:

$$m_A = m_{2a} + m_{3a}$$

$$m_B = m_{3b} + m_4$$

siendo m_4 la masa del pistón. Se puede concluir que la m_A realiza una rotación pura al contrario que la m_B , con una traslación pura.

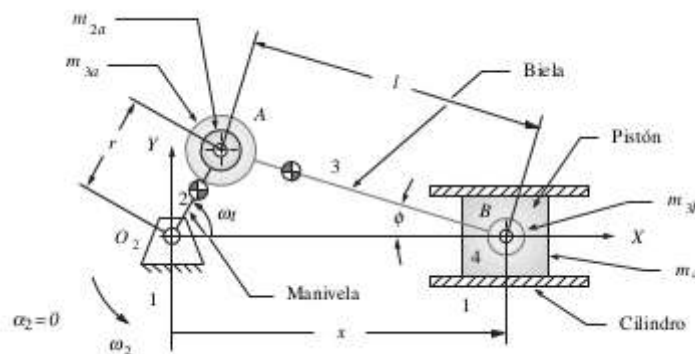


Fig. 8: Modelo dinámico del mecanismo. (Norton, Robert L. (2005) Diseño de Maquinaria)

6.3. Estudio teórico de fuerzas y pares de inercia en un monocilindro

Una vez establecida la equivalencia dinámica para simplificar el modelo con masas concentradas, se detallarán las expresiones que definen las fuerzas y los pares de torsión que aparecen como consecuencia de la aceleración de las masas del sistema.

6.3.1. Fuerzas de inercia y de sacudimiento

Debido a las masas en movimiento aparecen estas fuerzas inerciales que afectan al sistema y a su entorno. Se aplicará el método de l'Alembert para encontrar estos efectos en el mismo plano de la bancada. Alembert denomina equilibrio dinámico a la suma de fuerzas externas y fuerzas de inercia sobre un cuerpo formando un sistema de fuerzas en equilibrio.

Este principio no deja de ser una generalización de la segunda ley de Newton, que se puede aplicar a sistemas con ligaduras, donde las fuerzas de ligadura no hacen trabajo en un movimiento compatible. También equivale a las ecuaciones de Euler-Lagrange como principio de velocidades generalizadas. Aplicando este principio a la mecánica de sólidos, es útil a la hora de plantear ecuaciones de movimiento y calcular reacciones partiendo de un campo de desplazamientos virtuales diferenciable; principio de trabajos virtuales.

A partir del modelo dinámico del mecanismo, se obtienen los diagramas de sólido libre de cada elemento. En los diagramas aparecen las fuerzas que actúan en cada punto. Focalizando sobre los puntos A y B, donde se sitúan las masas puntuales anteriores, se pueden obtener las aceleraciones correspondientes, y consiguientemente las fuerzas.

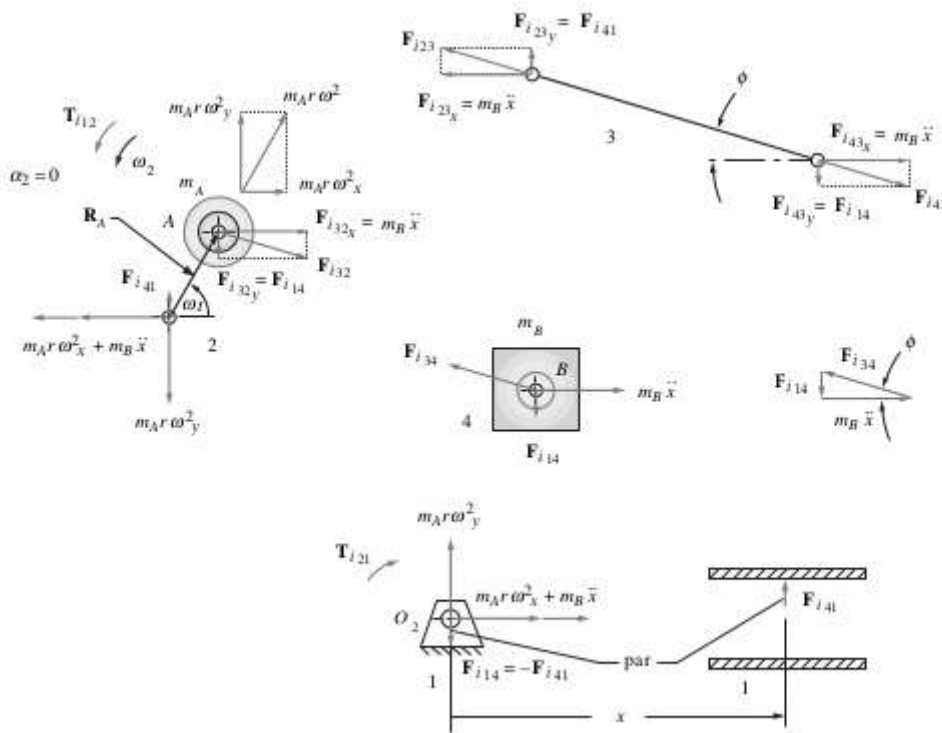


Fig. 9: Diagrama de sólido libre del modelo dinámico de masa concentrada con la dirección, sentido y magnitud de las diversas componentes. (Norton, Robert L. (2005) Diseño de Maquinaria)

Del punto B, que realiza una traslación pura, ya se ha encontrado anteriormente la expresión de la aceleración del pistón. Del punto A, en rotación pura, su aceleración se obtiene derivando dos veces el vector posición de A, siempre considerando que la velocidad angular ω se mantiene constante.

$$> RA := r \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot i + r \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot j;$$

$$RA := r \cos(\omega t) i + r \sin(\omega t) j$$

$$> aA := \text{diff}(RA, t\$2);$$

$$aA := -r \omega^2 \cos(\omega t) i - r \omega^2 \sin(\omega t) j$$

> $aA := \text{subs}(\omega t = \theta, aA);$

$$aA := -r \cos(\theta) \omega^2 i - r \sin(\theta) \omega^2 j$$

Por lo tanto, la fuerza de inercia es la suma de la fuerza centrífuga de A y la de inercia de B. Se separa dicha fuerza en ambos componentes o ejes del plano de trabajo:

> $Fi := -mA \cdot aA - mB \cdot aB_{\text{aprox}};$

> $Fix := -mA \cdot (-r \cdot \omega^2 \cdot \cos(\theta)) - mB \cdot aB_{\text{aprox}};$

$$\begin{aligned} Fix := & mAr\omega^2 \cos(\theta) - \frac{1}{262144} \frac{1}{l^{11}} \left((315r^{12}\omega^2 \cos(12\theta) - 1400 \cos(10\theta) l^2 \omega^2 r^{10} \right. \\ & - 2520 \cos(10\theta) \omega^2 r^{12} + 5120 \cos(8\theta) l^4 \omega^2 r^8 + 8960 \cos(8\theta) l^2 \omega^2 r^{10} \\ & + 8190 \cos(8\theta) \omega^2 r^{12} - 18432 \cos(6\theta) l^6 \omega^2 r^6 - 23040 \cos(6\theta) l^4 \omega^2 r^8 \\ & - 22680 \cos(6\theta) l^2 \omega^2 r^{10} - 12600 \cos(6\theta) \omega^2 r^{12} + 65536 \cos(4\theta) l^8 \omega^2 r^4 \\ & + 49152 \cos(4\theta) l^6 \omega^2 r^6 + 35840 \cos(4\theta) l^4 \omega^2 r^8 + 26880 \cos(4\theta) l^2 \omega^2 r^{10} \\ & + 4725 \cos(4\theta) \omega^2 r^{12} - 262144 \cos(2\theta) l^{10} \omega^2 r^2 - 65536 \cos(2\theta) l^8 \omega^2 r^4 \\ & - 30720 \cos(2\theta) l^6 \omega^2 r^6 - 17920 \cos(2\theta) l^4 \omega^2 r^8 - 11760 \cos(2\theta) l^2 \omega^2 r^{10} \\ & \left. + 15120 \cos(2\theta) \omega^2 r^{12} - 262144 r \omega^2 \cos(\theta) l^{11} - 13230 r^{12} \omega^2) mB \right) \end{aligned}$$

Al trabajar pues con los cinco primeros armónicos de la expresión, la fuerza inercial en el eje de las X resultante es:

> $Fix_{\text{aprox5}} := mAr\omega^2 \cos(\theta) - \frac{1}{262144} \frac{1}{l^{11}} \left((65536 \cos(4\theta) l^8 \omega^2 r^4 \right.$
 $+ 49152 \cos(4\theta) l^6 \omega^2 r^6 + 35840 \cos(4\theta) l^4 \omega^2 r^8 + 26880 \cos(4\theta) l^2 \omega^2 r^{10}$
 $+ 4725 \cos(4\theta) \omega^2 r^{12} - 262144 \cos(2\theta) l^{10} \omega^2 r^2 - 65536 \cos(2\theta) l^8 \omega^2 r^4$
 $- 30720 \cos(2\theta) l^6 \omega^2 r^6 - 17920 \cos(2\theta) l^4 \omega^2 r^8 - 11760 \cos(2\theta) l^2 \omega^2 r^{10}$
 $\left. + 15120 \cos(2\theta) \omega^2 r^{12} - 262144 r \omega^2 \cos(\theta) l^{11}) mB \right);$

$$\begin{aligned} Fix_{\text{aprox}} := & mAr\omega^2 \cos(\theta) - \frac{1}{262144} \frac{1}{l^{11}} \left((65536 r^4 \omega^2 l^8 \cos(4\theta) \right. \\ & + 49152 r^6 \omega^2 l^6 \cos(4\theta) + 35840 r^8 \omega^2 l^4 \cos(4\theta) + 26880 r^{10} \omega^2 l^2 \cos(4\theta) \\ & + 4725 \cos(4\theta) \omega^2 r^{12} - 262144 r^2 \omega^2 l^{10} \cos(2\theta) - 65536 r^4 \omega^2 l^8 \cos(2\theta) \\ & - 30720 r^6 \omega^2 l^6 \cos(2\theta) - 17920 r^8 \omega^2 l^4 \cos(2\theta) - 11760 r^{10} \omega^2 l^2 \cos(2\theta) \\ & \left. + 15120 \cos(2\theta) \omega^2 r^{12} - 262144 r \omega^2 \cos(\theta) l^{11}) mB \right) \end{aligned}$$

> $Fiy := -mA \cdot (-r \cdot \omega^2 \cdot \sin(\theta));$

$$Fiy := mAr\omega^2 \sin(\theta)$$

Al observar estas expresiones, se puede comprobar cómo la masa rotatoria del cigüeñal genera tan sólo una fuerza inercial primaria. Mientras que la masa en B, produce fuerzas de inercia tanto primarias con la frecuencia de oscilación de la manivela, como secundarias en dos veces la frecuencia de la manivela y así sucesivamente con las diferentes armónicas provenientes de la expansión binomial.

Recurriendo a la fuerza de sacudimiento, que es la suma de todas las fuerzas que actúan en el plano de la bancada, se comprueba que:

$$F_s = -F_i$$

Aplicando sumatorio de fuerzas en ambos ejes a partir del diagrama de sólido libre del cuerpo 1 se tiene que:

$$\sum F_{sx} = -m_A (r\omega^2 \cos \omega t) - m_B a_B$$

$$F_{i14} = -F_{i41}$$

$$\sum F_{sy} = -m_A (r\omega^2 \sin \omega t) + F_{i41} + F_{i14} = -m_A (r\omega^2 \sin \omega t)$$

Como se verá en el siguiente apartado estas dos fuerzas F_{i14} y F_{i41} serán las responsables de generar un par de torsión en el sistema. Cabe remarcar también, cómo la fuerza de gas no aparece representada en esta expresión, ya que es una fuerza interna que desaparece dentro del mecanismo, pero sí que actúan en la misma dirección y sentido tanto en la pared del cilindro como en el cigüeñal.

6.3.2. Pares de torsión de inercia y de sacudimiento

En este apartado se tratará el par de torsión de inercia procedente de las fuerzas de inercia antes encontradas en un brazo de momento.

Tomando como base el diagrama de sólidos libres anteriormente adscrito, considerando una ω constante de la manivela, la masa puntual de A no genera ningún par de torsión. Profundizando en estas fuerzas, la componente tangencial, con brazo de momento r , al dirigirse al punto O_2 de la bancada, es nula. Por lo que respecta a la componente radial de la fuerza, esta no tiene brazo de momento.

Volviendo a ignorar la fricción del sistema y considerando ahora la masa del punto B, la fuerza de inercia tiene una componente perpendicular a la pared del cilindro. Esta fuerza es cero en dos instantes del ciclo; cuando el pistón se encuentra en PMS o PMI. Trabajando con la fuerza F_{i41} , siempre perpendicular al movimiento en x del pistón, y tomando x como brazo de momento en cada instante del ciclo, se obtiene que:

$$T_{i21} = F_{i41} \cdot x \hat{k} = -F_{i14} \cdot x \hat{k}$$

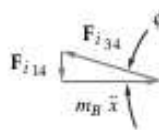


Fig. 10: Triángulo de fuerzas (Norton, Robert L. (2005) Diseño de Maquinaria)

Si ahora se substituye la expresión antes encontrada de la posición del pistón (x), y cerrando el triángulo de fuerzas que confluyen en B se encuentra la función del par de torsión:

$$T_{i21} \cong -(-m_B \cdot a_B \cdot \tan\phi) \cdot x$$

Substituyendo la aceleración $\ddot{x} = a_B$ y la ecuación que define la posición del pistón x , solo quedará encontrar la definición de la $\tan\phi$.

A partir de esta expresión, ya se trabaja con los ángulos de la biela y la manivela, ϕ y ωt , respectivamente. Es más conveniente expresarla sólo en función de ωt . Basándose en la geometría del mecanismo:

$$\tan\phi = \frac{q}{u} = \frac{r \sin\omega t}{l \cos\phi} = \frac{r \sin\omega t}{l \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin\omega t\right)^2}}$$

Se vuelve a realizar una expansión del radical del denominador por el binomio de Newton, cogiendo los cinco primeros términos de la serie, con el fin de garantizar una elevada precisión. Este binomio ya se ha detallado anteriormente con el resto de expansiones.

Primero se realizará la sustitución de todas las partes que definen las fuerzas, para su posterior simplificación. Mediante este camino, se evitan problemas derivados de la presencia de raíces en los denominadores y otros factores que aparecen en los términos finales que son difíciles de comprender. Se busca pues, una interpretación lógica de los resultados obtenidos, que es posible realizando los cálculos de este modo.

> *Fil4* := expand(expand(- mB·aB·tanφ));

$$\begin{aligned} Fil4 := & \frac{mBr^2 \sin(\theta) \omega^2 \cos(\theta)}{l \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2}}} + \frac{mBr^5 \sin(\theta)^3 \cos(\theta)^2 \omega^2}{l^4 \left(1 - \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2}\right)^2} + \frac{mBr^3 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \omega^2}{l^2 \left(1 - \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2}\right)} \\ & - \frac{mBr^3 \sin(\theta)^3 \omega^2}{l^2 \left(1 - \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2}\right)} \end{aligned}$$

A continuación se realiza la correspondiente sustitución de los binomios que aparecen en la expresión anterior, así como la expansión de la misma obteniendo la fuerza de inercia aproximada, que luego se truncará hasta el quinto armónico del ángulo.

Una vez encontrada la fuerza se puede proceder con el momento de inercia debido a esta, que se producirá durante el movimiento alternativo del motor. El camino a seguir será el mismo, con el fin de conseguir la expresión aproximada que defina este momento.

> $M_Fil4 := -Fil4 \cdot x;$

$$\begin{aligned}
 M_Fil4 := & - \left(\frac{mBr^2 \sin(\theta) \omega^2 \cos(\theta)}{l \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2}}} + \frac{mBr^5 \sin(\theta)^3 \cos(\theta)^2 \omega^2}{l^4 \left(1 - \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2}\right)^2} \right. \\
 & + \frac{mBr^3 \sin(\theta) \cos(\theta)^2 \omega^2}{l^2 \left(1 - \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2}\right)} - \left. \frac{mBr^3 \sin(\theta)^3 \omega^2}{l^2 \left(1 - \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2}\right)} \right) \left(r \cos(\theta) \right. \\
 & \left. + l \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2}} \right)
 \end{aligned}$$

> $M_Fil4 := \text{expand}(M_Fil4);$

$$\begin{aligned}
 M_Fil4 := & - \frac{2 mBr^3 \sin(\theta) \omega^2 \cos(\theta)^2}{l \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2}}} - mBr^2 \sin(\theta) \omega^2 \cos(\theta) \\
 & - \frac{mBr^6 \sin(\theta)^3 \cos(\theta)^3 \omega^2}{l^4 \left(1 - \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2}\right)^2} - \frac{mBr^5 \sin(\theta)^3 \cos(\theta)^2 \omega^2}{l^3 \left(1 - \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2}\right)^{3/2}} - \frac{mBr^4 \sin(\theta) \cos(\theta)^3 \omega^2}{l^2 \left(1 - \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2}\right)} \\
 & + \frac{mBr^4 \sin(\theta)^3 \omega^2 \cos(\theta)}{l^2 \left(1 - \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2}\right)} + \frac{mBr^3 \sin(\theta)^3 \omega^2}{l \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2}}}
 \end{aligned}$$

> $M_Fil4aprox := - \frac{mB \cdot r^4 \sin(\theta) \omega^2 \cos(\theta)^3 \cdot binomi3}{l^2} - \frac{mB \cdot 2 r^3 \sin(\theta) \omega^2 \cos(\theta)^2 \cdot binomi1}{l}$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{mB \cdot r^4 \sin(\theta)^3 \omega^2 \cos(\theta) \cdot binomi3}{l^2} + \frac{mB \cdot r^3 \sin(\theta)^3 \omega^2 \cdot binomi1}{l} \\
 & - \frac{mB \cdot r^6 \sin(\theta)^3 \omega^2 \cos(\theta)^3 \cdot binomi4}{l^4} - \frac{mB \cdot r^5 \sin(\theta)^3 \omega^2 \cos(\theta)^2 \cdot binomi2}{l^3} - mB \\
 & \cdot r^2 \sin(\theta) \omega^2 \cos(\theta);
 \end{aligned}$$

$M_{Fi14aprox} :=$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{l^2} \left(mBr^4 \sin(\theta) \omega^2 \cos(\theta)^3 \left(1 + \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2} + \frac{r^4 \sin(\theta)^4}{l^4} + \frac{r^6 \sin(\theta)^6}{l^6} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{r^8 \sin(\theta)^8}{l^8} \right) \right) - \frac{1}{l} \left(2mBr^3 \sin(\theta) \omega^2 \cos(\theta)^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{3}{8} \frac{r^4 \sin(\theta)^4}{l^4} + \frac{5}{16} \frac{r^6 \sin(\theta)^6}{l^6} + \frac{35}{128} \frac{r^8 \sin(\theta)^8}{l^8} \right) \right) \\
& + \frac{1}{l^2} \left(mBr^4 \sin(\theta)^3 \omega^2 \cos(\theta) \left(1 + \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2} + \frac{r^4 \sin(\theta)^4}{l^4} + \frac{r^6 \sin(\theta)^6}{l^6} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{r^8 \sin(\theta)^8}{l^8} \right) \right) + \frac{1}{l} \left(mBr^3 \sin(\theta)^3 \omega^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2} + \frac{3}{8} \frac{r^4 \sin(\theta)^4}{l^4} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{5}{16} \frac{r^6 \sin(\theta)^6}{l^6} + \frac{35}{128} \frac{r^8 \sin(\theta)^8}{l^8} \right) \right) - \frac{1}{l^4} \left(mBr^6 \sin(\theta)^3 \omega^2 \cos(\theta)^3 \left(1 \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{2r^2 \sin(\theta)^2}{l^2} + \frac{3r^4 \sin(\theta)^4}{l^4} + \frac{4r^6 \sin(\theta)^6}{l^6} + \frac{5r^8 \sin(\theta)^8}{l^8} \right) \right) \\
& - \frac{1}{l^3} \left(mBr^5 \sin(\theta)^3 \omega^2 \cos(\theta)^2 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2} + \frac{15}{8} \frac{r^4 \sin(\theta)^4}{l^4} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{35}{16} \frac{r^6 \sin(\theta)^6}{l^6} + \frac{315}{128} \frac{r^8 \sin(\theta)^8}{l^8} \right) \right) - mBr^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \omega^2
\end{aligned}$$

Una vez se ha alcanzado este punto, y después de trabajar con la expresión completa de este momento de inercia, se vuelven a escoger los cinco primeros armónicos de la misma para su representación posterior durante el desarrollo de las simulaciones.

$$\begin{aligned}
M_{Fi14aprox5} := & \frac{1}{524288} \frac{1}{l^{12}} \left((-131072 l^{11} \omega^2 r^3 - 32768 l^9 \omega^2 r^5 - 15360 l^7 \omega^2 r^7 \right. \\
& \left. - 8960 l^5 \omega^2 r^9 - 5880 l^3 \omega^2 r^{11} + 41580 l \omega^2 r^{13}) \cdot mB \cdot \sin(\theta) \right) \\
& + \frac{1}{524288} \frac{1}{l^{12}} \left((262144 l^{12} \omega^2 r^2 + 16384 l^8 \omega^2 r^6 + 16384 l^6 \omega^2 r^8 + 14336 l^4 \omega^2 r^{10} \right. \\
& \left. + 12288 l^2 \omega^2 r^{12} + 31680 \omega^2 r^{14}) \cdot mB \cdot \sin(2\theta) \right) + \frac{1}{524288} \frac{1}{l^{12}} \left((393216 l^{11} \omega^2 r^3 \right. \\
& \left. + 147456 l^9 \omega^2 r^5 + 82944 l^7 \omega^2 r^7 + 53760 l^5 \omega^2 r^9 + 37800 l^3 \omega^2 r^{11} - 10395 l \omega^2 r^{13}) \right. \\
& \left. \cdot mB \cdot \sin(3\theta) \right) + \frac{1}{524288} \frac{1}{l^{12}} \left((131072 l^{10} \omega^2 r^4 + 65536 l^8 \omega^2 r^6 + 32768 l^6 \omega^2 r^8 \right. \\
& \left. + 16384 l^4 \omega^2 r^{10} + 7680 l^2 \omega^2 r^{12} - 28160 \omega^2 r^{14}) \cdot mB \cdot \sin(4\theta) \right) \\
& + \frac{1}{524288} \frac{1}{l^{12}} \left((-81920 l^9 \omega^2 r^5 - 76800 l^7 \omega^2 r^7 - 64000 l^5 \omega^2 r^9 - 52500 l^3 \omega^2 r^{11} \right. \\
& \left. - 17325 l \omega^2 r^{13}) \cdot mB \cdot \sin(5\theta) \right) :
\end{aligned}$$

Tal y como se mencionó, este par será igual al par de torsión de sacudimiento.

$$T_s = T_{i21}$$

A la hora de diseñar un motor, se intenta encontrar un par de inercia nulo, o lo más cercano a cero. En su valor promedio este par residual es cero, por lo que este no aporta ni positiva ni negativamente nada al par motriz del motor. Su efecto no es más que generar vibraciones y aspereza del motor, ya que crea oscilaciones en su valor de torsión total.

6.4. Estudio teórico de fuerzas y pares de gas de un monocilindro

Una vez estudiadas las fuerzas y los pares de inercia producidos por el movimiento de los elementos a altas velocidades en el apartado anterior, se procederá al análisis del movimiento generado por la expansión de los gases después de su combustión en la cámara del cilindro.

De los motores alternativos se espera la obtención de un par de torsión como elemento de salida. Este par queda representado en una curva de explosión, que para el caso de cuatro tiempos que se está estudiando se genera una vez por cada dos revoluciones de la manivela.

El estudio dinámico del sistema presenta muchas variables que afectarán al modelo final, como bien puede ser el ciclo de funcionamiento, el combustible, magnitudes geométricas, la velocidad de este, factores termodinámicos...



Fig. 11: Función del par de torsión de un ciclo Otto de 4T. (Norton, Robert L. (2005) Diseño de Maquinaria)

El origen de esta fuerza de gas no es más que la generada por la presión de dicho gas debido a la explosión y correspondiente expansión de la mezcla aire-combustible que se encuentra en la cámara de combustión instantes antes de su ignición, ya sea por chispa como por autoignición. Esta presión generada choca contra la superficie del pistón y le aporta el movimiento. Se definen pues los parámetros y expresiones que se van a usar:

$$F_g = \text{fuerza del gas}$$

$$P_g = \text{presión de gas}$$

$$A_p = \text{área del pistón}$$

$$B = \text{diámetro interior del cilindro} = \text{diámetro del pistón}$$

$$A_p = \frac{\pi}{4} B^2$$

$$F_g = -P_g A_p \hat{i} = -\frac{\pi}{4} P_g B^2 \hat{i}$$

El signo negativo de la expresión se debe a la posición del mecanismo en los ejes de coordenadas de trabajo. Para conocer la fuerza de gas, solo queda conocer la presión de gas, el valor del cual depende de ωt y la termodinámica del motor. Al ser directamente proporcionales, y el resto de parámetros son geométricos, ambas graficas de presión o fuerza presentan la misma forma en la curva.

Tratando ahora con el par de torsión de gas, este se debe a la fuerza del gas como es de suponer. Esta fuerza actúa sobre un brazo de momento respecto O_2 , que varía desde cero hasta un valor máximo con el giro de la manivela.

En el estudio de todas estas expresiones se menosprecian las fuerzas de rozamiento. La fuerza del gas que actúa sobre la superficie del pistón, pasa a ser una fuerza puntual sobre el nodo B. Descomponiéndola en un sistema de fuerzas sobre B se obtiene que:

$$F_{g14} = F_g \tan \phi \hat{j}$$

$$F_{g34} = -F_g \hat{i} - F_g \tan \phi \hat{j}$$

Observando los diagramas de solido libre se puede comprobar que:

$$F_{g32} = -F_{g34} = F_g \hat{i} + F_g \tan \phi \hat{j}$$

Se define el par de torsión motriz como aquel generado en la manivela por el producto vectorial de la F_g por la distancia a A:

$$M_{g21} = R_A \times F_{g32}$$

En consecuencia, surge un par de torsión de reacción correspondiente a la F_g que intenta oscilar en el plano de la bancada:

$$M_{g12} = F_{41} \cdot x \hat{k}$$

Por tanto, se puede expresar:

$$M_{g41} = -M_{g14}$$

$$M_{g21} = -M_{g12} = -F_{41} \cdot x \hat{k} = F_{14} \cdot x \hat{k}$$

Esta última expresión relaciona el par de torsión de gas con el desplazamiento del pistón a lo largo del eje de las x, cuya expresión ya es conocida.

$$M_{g21} = (F_g \tan \phi) \cdot x \hat{k}$$

Substituyendo ambas expresiones desarrolladas se obtiene que el par de torsión de gas es:

> $Mg2l := \text{expand}(Fg \cdot \tan \varphi \cdot x);$

$$Mg2l := \frac{Fg r^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{l \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2}}} + Fg r \sin(\theta)$$

> $Mg2l_{aprox} := \frac{Fg r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \cdot \text{binomil}}{l} + Fg r \sin(\theta);$

$$Mg2l_{aprox} := \frac{1}{l} \left(Fg r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r^2 \sin(\theta)^2}{l^2} + \frac{3}{8} \frac{r^4 \sin(\theta)^4}{l^4} + \frac{5}{16} \frac{r^6 \sin(\theta)^6}{l^6} + \frac{35}{128} \frac{r^8 \sin(\theta)^8}{l^8} \right) \right) + Fg r \sin(\theta)$$

> $Mg2l_{aprox} := \text{combine}(\text{expand}(Mg2l_{aprox}), \text{trig});$

$$\begin{aligned} Mg2l_{aprox} := & \frac{1}{65536} \frac{1}{l^9} (32768 Fg r^2 \sin(2\theta) l^8 + 8192 Fg \sin(2\theta) l^6 r^4 \\ & + 3840 Fg \sin(2\theta) l^4 r^6 + 2240 Fg \sin(2\theta) l^2 r^8 + 1470 Fg r^{10} \sin(2\theta) \\ & - 4096 Fg \sin(4\theta) l^6 r^4 - 3072 Fg \sin(4\theta) l^4 r^6 - 2240 Fg \sin(4\theta) l^2 r^8 \\ & - 1680 Fg r^{10} \sin(4\theta) + 768 Fg \sin(6\theta) l^4 r^6 + 960 Fg \sin(6\theta) l^2 r^8 \\ & + 945 Fg r^{10} \sin(6\theta) + 35 Fg r^{10} \sin(10\theta) + 65536 Fg r \sin(\theta) l^9 - 160 Fg \sin(8\theta) l^2 r^8 \\ & - 280 Fg r^{10} \sin(8\theta)) \end{aligned}$$

> $Mg2l_{aprox} := \text{collect}(Mg2l_{aprox}, [\sin(\theta), \sin(2\theta), \sin(3\theta), \sin(4\theta), \sin(5\theta), \sin(6\theta), \sin(7\theta), \sin(8\theta), \sin(9\theta), \sin(10\theta)]);$

$$\begin{aligned} Mg2l_{aprox} := & Fg r \sin(\theta) \\ & + \frac{1}{65536} \frac{1}{l^9} ((32768 Fg l^8 r^2 + 8192 Fg l^6 r^4 + 3840 Fg l^4 r^6 + 2240 Fg l^2 r^8 \\ & + 1470 Fg r^{10}) \sin(2\theta)) \\ & + \frac{1}{65536} \frac{(-4096 Fg l^6 r^4 - 3072 Fg l^4 r^6 - 2240 Fg l^2 r^8 - 1680 Fg r^{10}) \sin(4\theta)}{l^9} \\ & + \frac{1}{65536} \frac{(768 Fg l^4 r^6 + 960 Fg l^2 r^8 + 945 Fg r^{10}) \sin(6\theta)}{l^9} \\ & + \frac{1}{65536} \frac{(-160 Fg l^2 r^8 - 280 Fg r^{10}) \sin(8\theta)}{l^9} + \frac{35}{65536} \frac{Fg r^{10} \sin(10\theta)}{l^9} \end{aligned}$$

Volviendo a los procedimientos anteriores, se trabajará hasta el quinto armónico de la expresión:

$$\begin{aligned}
 &> Mg21aprox5 := Fgr \sin(\theta) \\
 &\quad + \frac{1}{65536} \frac{1}{l^9} \left((32768 Fg l^8 r^2 + 8192 Fg l^6 r^4 + 3840 Fg l^4 r^6 + 2240 Fg l^2 r^8 \right. \\
 &\quad \left. + 1470 Fg r^{10}) \sin(2\theta) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{65536} \frac{(-4096 Fg l^6 r^4 - 3072 Fg l^4 r^6 - 2240 Fg l^2 r^8 - 1680 Fg r^{10}) \sin(4\theta)}{l^9};
 \end{aligned}$$

6.5. Superposició

Después de evaluar por separado los dos focos de momentos de torsión generados en el mecanismo, se aplica el principio de superposición para encontrar el par total. Este será la suma del par de torsión de gas y el de inercia:

$$M_{total} = M_g + M_i$$

A continuació apareix la expressió del par total una vegada realitzades totes les simplificacions i treballant fins al cinquè terme de la expressió global. La definició completa del moment queda detallada en el apartat de ANEXOS: 1. *Expresiones exactas.*

$$> Mtotal5 := M_Fi14aprox5 + Mg21aprox5 :$$

$$\begin{aligned}
 > Mtotal5 := collect(Mtotal5, [\sin(\theta), \sin(2\theta), \sin(3\theta), \sin(4\theta), \sin(5\theta)]); \\
 Mtotal5 := &\left(\frac{1}{524288} \frac{1}{l^{12}} \left((-131072 l^{11} \omega^2 r^3 - 32768 l^9 \omega^2 r^5 - 15360 l^7 \omega^2 r^7 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 8960 l^5 \omega^2 r^9 - 5880 l^3 \omega^2 r^{11} + 41580 l \omega^2 r^{13}) mB \right) + Fgr \right) \sin(\theta) \\
 &+ \left(\frac{1}{524288} \frac{1}{l^{12}} \left((262144 l^{12} \omega^2 r^2 + 16384 l^8 \omega^2 r^6 + 16384 l^6 \omega^2 r^8 + 14336 l^4 \omega^2 r^{10} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 12288 l^2 \omega^2 r^{12} + 31680 \omega^2 r^{14}) mB \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{65536} \frac{32768 Fg l^8 r^2 + 8192 Fg l^6 r^4 + 3840 Fg l^4 r^6 + 2240 Fg l^2 r^8 + 1470 Fg r^{10}}{l^9} \right) \\
 &\sin(2\theta) + \frac{1}{524288} \frac{1}{l^{12}} \left((393216 l^{11} \omega^2 r^3 + 147456 l^9 \omega^2 r^5 + 82944 l^7 \omega^2 r^7 \right. \\
 &\quad \left. + 53760 l^5 \omega^2 r^9 + 37800 l^3 \omega^2 r^{11} - 10395 l \omega^2 r^{13}) mB \sin(3\theta) \right) \\
 &+ \left(\frac{1}{524288} \frac{1}{l^{12}} \left((131072 l^{10} \omega^2 r^4 + 65536 l^8 \omega^2 r^6 + 32768 l^6 \omega^2 r^8 + 16384 l^4 \omega^2 r^{10} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 7680 l^2 \omega^2 r^{12} - 28160 \omega^2 r^{14}) mB \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{65536} \frac{-4096 Fg l^6 r^4 - 3072 Fg l^4 r^6 - 2240 Fg l^2 r^8 - 1680 Fg r^{10}}{l^9} \right) \sin(4\theta) \\
 &+ \frac{1}{524288} \frac{1}{l^{12}} \left((-81920 l^9 \omega^2 r^5 - 76800 l^7 \omega^2 r^7 - 64000 l^5 \omega^2 r^9 \right. \\
 &\quad \left. - 52500 l^3 \omega^2 r^{11} - 17325 l \omega^2 r^{13}) mB \sin(5\theta) \right)
 \end{aligned}$$

Comentando la contribución de cada uno al par total, esta dependerá de la velocidad instantánea del motor. El par de inercia tendrá una mayor relevancia a la velocidad del motor, ya que este término aparece al cuadrado en su expresión (ω^2).

A bajas velocidades, el par de gas predomina respecto al de inercia, que se puede considerar insignificante en el par de torsión total. Sin embargo, para regímenes altos de vueltas, el par de inercia es el dominante. Finalmente, con velocidades intermedias, el par total es una mezcla de ambos componentes.

Cabe mencionar como se producirán desequilibrios en el eje de salida del motor, según vaya variando la velocidad del mismo. Este desequilibrio vendrá dado por las fuerzas de inercia, pero no por las fuerzas de gas ya que estas no generan fuerzas de sacudimiento. La fuerza del gas que empuja el pistón tiene el mismo módulo y dirección, pero con sentido opuesto por lo que se anula con la culata del motor.

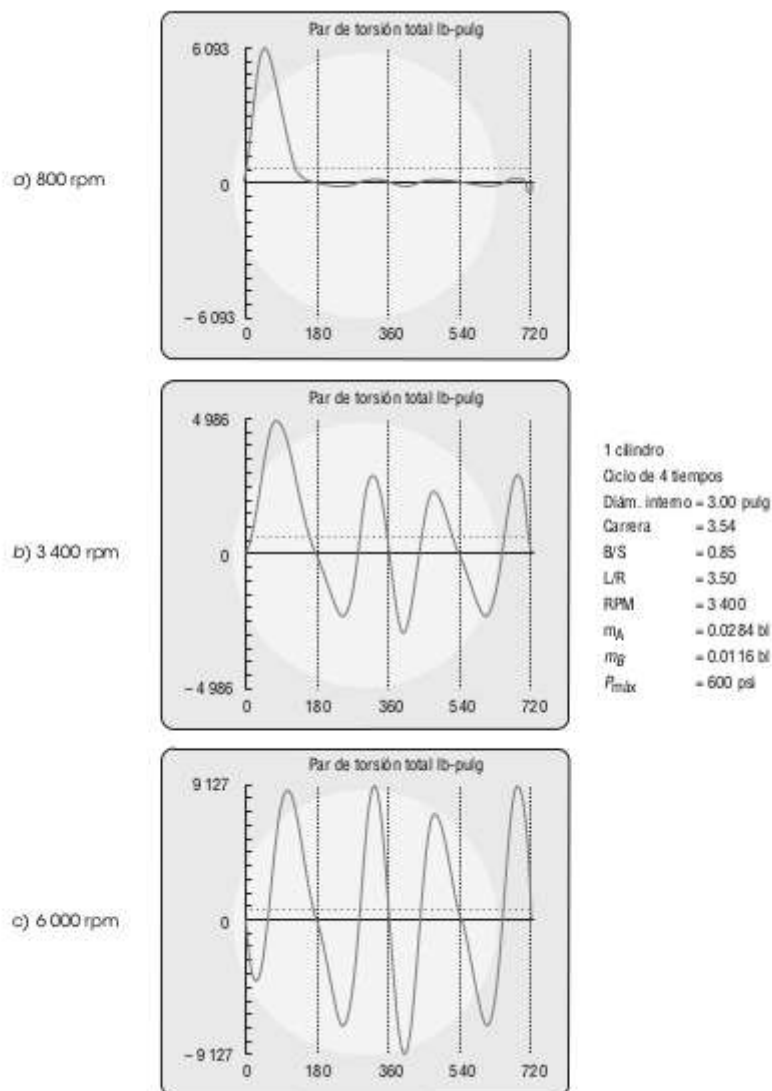


Fig. 12: Variación de la forma y magnitud del par de torsión total en función de la velocidad de giro del motor. (Norton, Robert L. (2005) Diseño de Maquinaria)

6.6. Volantes de inercia

El mecanismo de un motor alternativo de combustión interna, dónde solo existe una carrera que proporciona potencia al sistema (tiempo de explosión), y en el caso de los motores de cuatro tiempos, tres carreras más (admisión, compresión y escape), precisarán de un elemento que haga mover el pistón a través de estas fases. El encargado de realizar esta función es el volante de inercia, el cual almacenará la energía cinética necesaria para realizar trabajo sobre el sistema cuando sea necesario.

Por tanto, el volante se encargará de reducir las grandes oscilaciones de par de torsión generado en cada ciclo. La función del par de torsión de una revolución representa la variación de energía en el sistema.

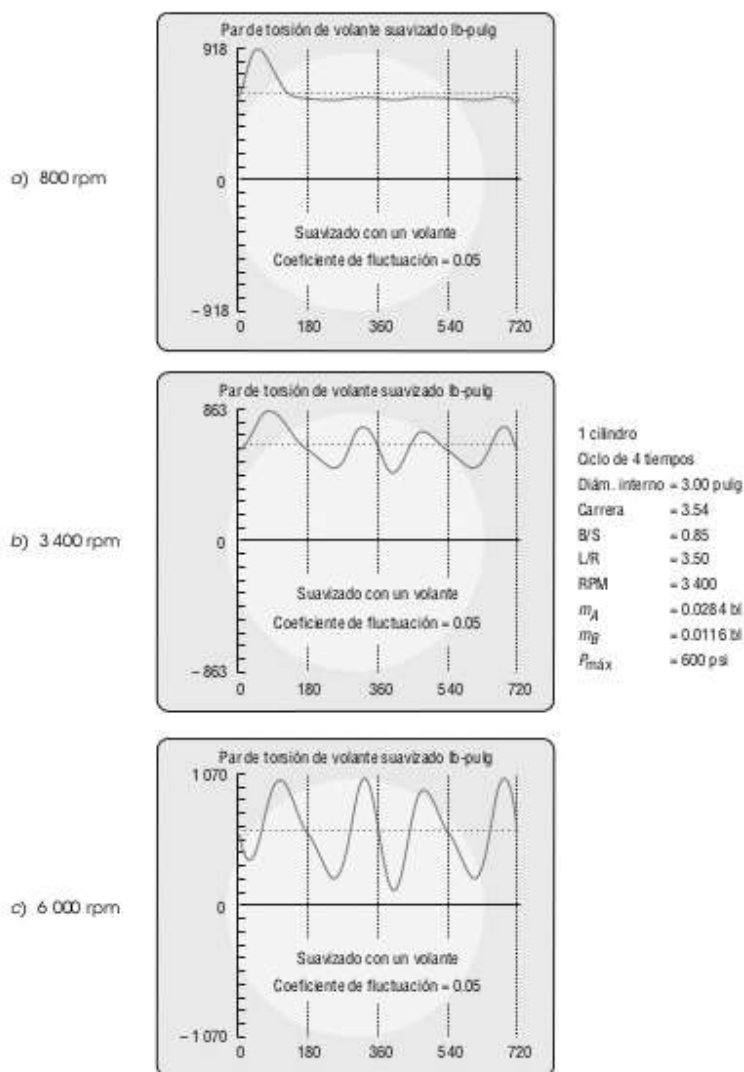


Fig. 13: Par de torsión de volante en función de las revoluciones del motor. (Norton, Robert L. (2005) Diseño de Maquinaria)

Para establecer la inercia apropiada para el volante, hay que considerar diversos aspectos. La complejidad reside en que un motor opera a diferentes regímenes de vueltas por lo que se buscará una solución de compromiso. La energía cinética almacenada, por definición, es proporcional a ω^2 , por lo que el volante podrá tener un momento de inercia bajo a altas revoluciones. Sin embargo, a velocidades de giro inferiores el volante deberá ser mayor.

Si se grafica un motor monocilíndrico a diferentes revoluciones, con y sin volante de inercia, se puede observar que para un mismo régimen de vueltas el pico de par de torsión disminuye considerablemente. Por otro lado, la fluctuación de energía del sistema es menor, manteniendo un nivel energético elevado. Es necesario matizar que para cada velocidad el volante ha sido calculado para obtener un coeficiente de fluctuación concreto, por lo que cada uno de ellos es diferente para cada velocidad. Para conseguir uniformizar el par con un volante, la mejor configuración será aquella que tenga una menor variación con el incremento de la velocidad.

Físicamente, el volante de inercia no es más que un disco plano sujeto a un extremo del cigüeñal del motor. Normalmente, el volante se usa para que el embrague (dispositivo que funciona por fricción que se encarga de conectar o desconectar el motor respecto el tren motriz) haga contacto con una de sus caras.

6.7. Equilibrado del motor monocilíndrico

Tal y como se ha podido comprobar en los apartados anteriores, se generan unas fuerzas, internas debidas a la expansión de los gases, en el plano de la bancada que afectan a las fuerzas inerciales.

Por este motivo, es importante un correcto balanceo del motor. Al tratarse de un motor de un único cilindro es un dispositivo de un sólo plano, perfecto para poder realizar un equilibrado estático. Partiendo del modelo dinámico considerando las masas concentradas anteriormente expuestas, para balancear la manivela tan solo se deberá situar una masa de balanceo a 180° de su masa concentrada en A. Se deberá cumplir la siguiente expresión que define la cantidad de masa y a la distancia que se debe de colocar en el punto A' a 180° para que las masas rotatorias queden balanceadas:

$$m_{bal} \cdot R_{bal} = -m_A \cdot R_A$$

Un apunte técnico es que en un cigüeñal real, al encontrarse el centro de gravedad de la manivela en el punto fijo O_2 el pistón no quedará liberado en el PMI, por lo que la masa de balanceo debe mantenerse cerca de la línea de centros, tal y como se muestra en la siguiente figura de un cigüeñal real.

Al imponer una manivela perfectamente balanceada con este contrapeso, se consigue eliminar la componente Y de la fuerza de sacudimiento. En contraposición, la componente X de la misma se reduce a la tercera parte respecto un motor desbalanceado. Para conseguir equilibrar esta fuerza inercial restante, se recurriría al mismo principio; introducir una masa oscilante desfasada 180° con el pistón.

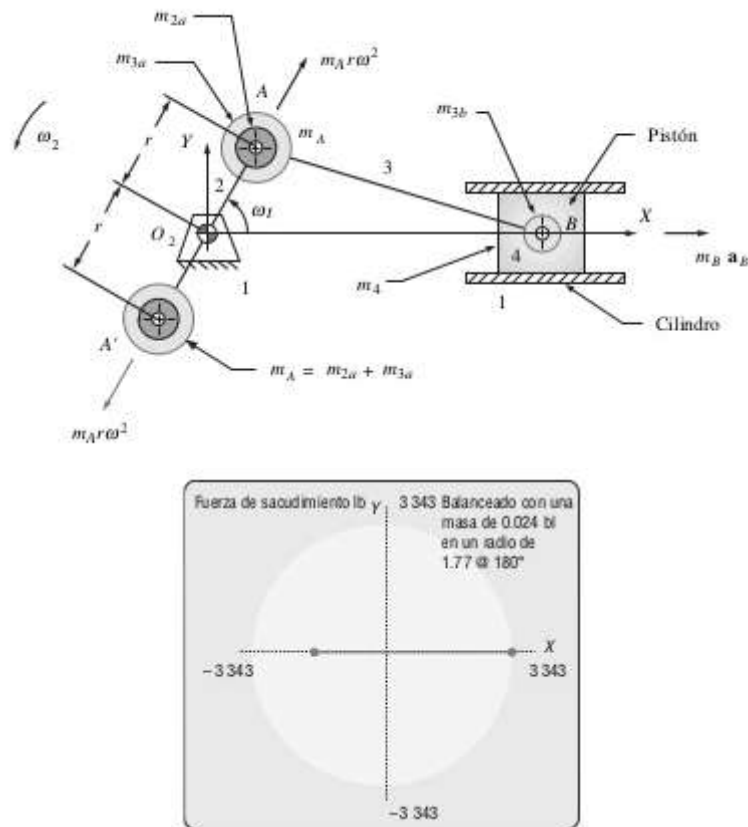


Fig. 14: Manivela exactamente balanceada y efectos sobre la fuerza de sacudimiento. (Norton, Robert L. (2005) Diseño de Maquinaria)

Con el fin de lograr este equilibrio, se propone agregar varios cilindros más. La disposición adecuada de los cilindros intentará reducir o eliminar estas fuerzas inerciales, obteniendo motores multicilíndricos mejor balanceados. Este es uno de los objetivos principales de este estudio teórico.

Como otra alternativa al equilibrado de un motor de un cilindro, se plantea un sobrealanceo de la manivela. Se trata de agregar una masa m_p a la ya añadida antes en el punto A'. Esta acción no conseguirá eliminar por completo las fuerzas de sacudimiento, pero sí que logrará reducirlas aún más. Al agregar esta masa adicional se genera la consecuente fuerza de inercia ($-m_p r \omega^2$). Si se descompone en los ejes X e Y, se obtendrá una nueva fuerza de inercia sobre Y, antes ya balanceada, y otra en la componente X que se opondrá a la fuerza de inercia que se crea en el punto B del pistón. Es decir, incorporará una fuerza de sacudimiento en la dirección Y con el fin de reducir la de la dirección X.

Respecto el valor de la masa de sobrealanceo, para minimizar el pico de fuerza inercial, variará en función de las características del motor. Normalmente, su valor ronda entorno un medio y dos tercios de la masa en el punto B, colocándola en el radio r de la manivela.

Con este método se logra un mejor balanceo, ya que se obtienen magnitudes menores de las fuerzas de sacudimiento. Es de relevancia reducirlas, porque de ellas dependen directamente las vibraciones que se transmiten a la estructura. Por este motivo, se mejora la durabilidad de los componentes al producirse menores vibraciones. La presencia del contrapeso mejora también la respuesta del motor, pero en ningún caso consigue equilibrarlo por completo.

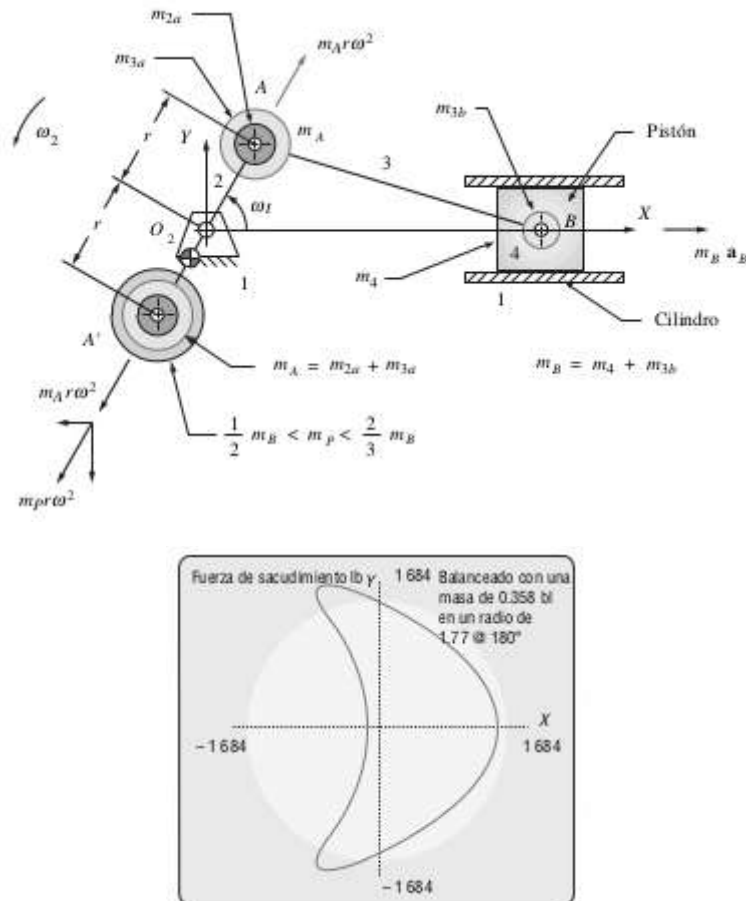


Fig. 15: Manivela sobrebalanceada y efecto sobre la fuerza de sacudimiento. (Norton, Robert L. (2005) Diseño de Maquinaria)

7. Simulación numérica del sistema

Una vez se ha realizado todo el estudio sobre el comportamiento del mecanismo biela-manivela y se han obtenido las ecuaciones que describen tanto las fuerzas como los pares que se generan durante el funcionamiento del motor, se procederá a la elaboración de un modelo para obtener las representaciones. Dicho modelo constará de los datos necesarios para resolver las expresiones, por lo tanto se le darán valores a los diversos términos que aparecen.

Primeramente, se llevará a cabo para un único pistón, con el consiguiente objetivo de extender el análisis a diferentes configuraciones multicilíndricas en una etapa posterior del estudio. La finalidad es, por tanto, elaborar un modelo básico que sirva de base para luego poder simular diferentes modelos multicilíndricos.

7.1. Cinemática del mecanismo

Paso previo al desarrollo dinámico del mecanismo biela-manivela, se ha representado la cinemática. En ella se incluye el comportamiento de la posición, velocidad y aceleración del pistón a lo largo del ciclo de funcionamiento. En el siguiente gráfico, extraído de la hoja de Excel adjunta como documento anexo a esta memoria (*Cinemática.xlsx*), se muestra la representación comparativa entre la posición y la aceleración del pistón, variables de mayor importancia.

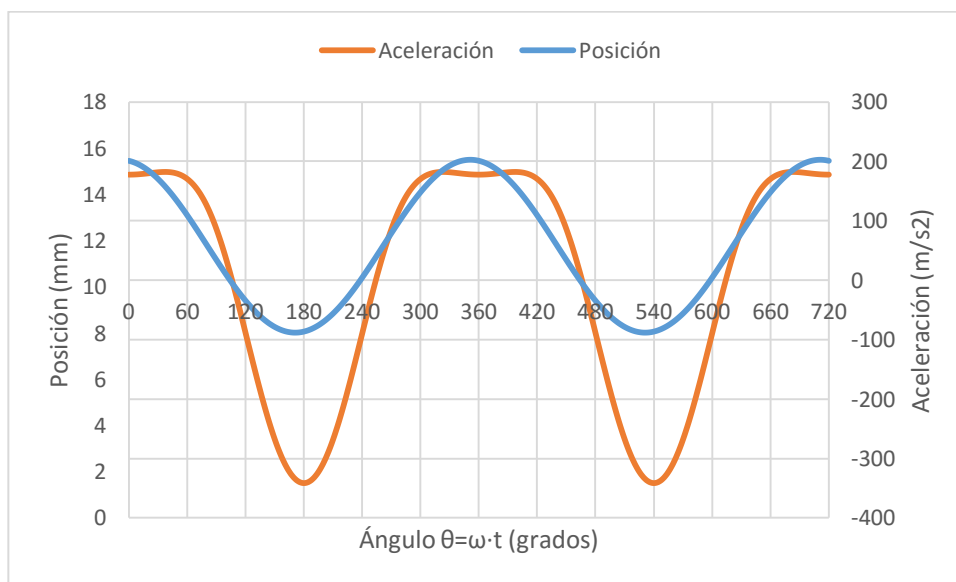


Gráfico 1: Representación de los parámetros cinemáticos

Con el programa ENGINE también se pueden lograr la representación de estas componentes, incluyendo además la forma que toma la curva de la fuerza del gas. Estas curvas han sido generadas a partir de los valores con los que se realiza el estudio, tal y como se observa en el margen de la figura:

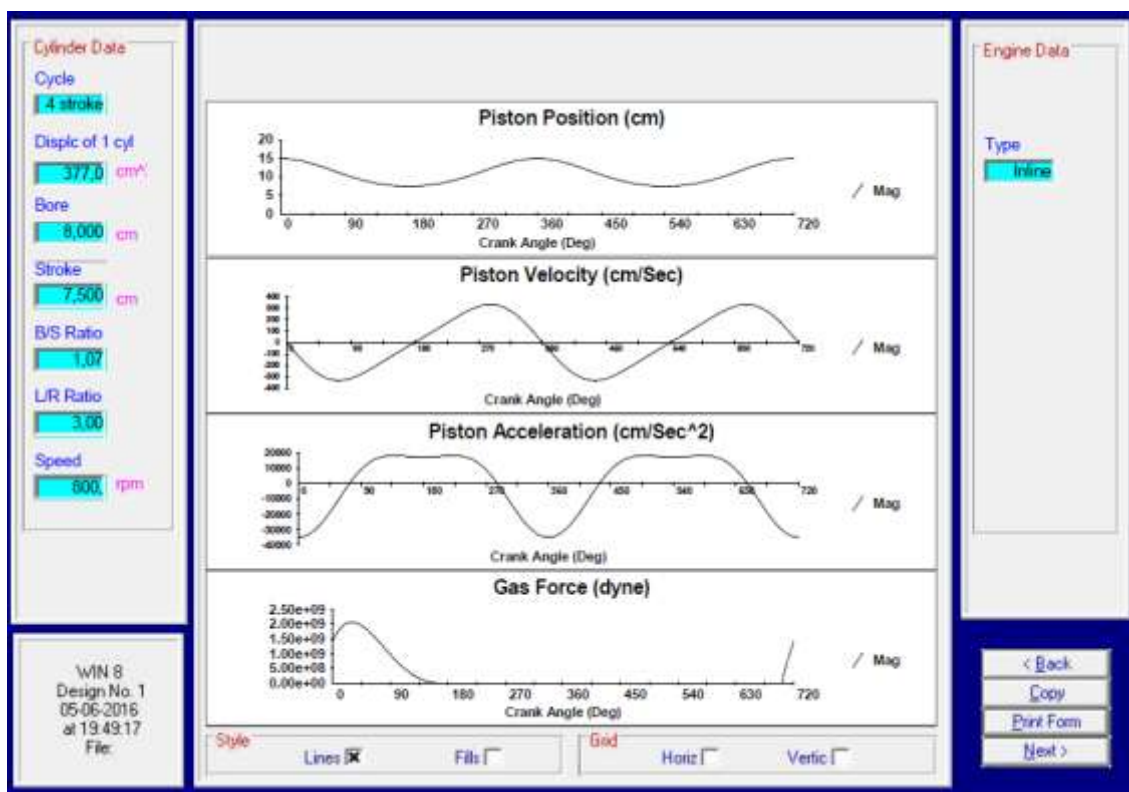


Fig. 16: Representación de la posición, velocidad y aceleración con ENGINE

7.2. Modelo de masas equivalentes

Tal y como se ha desarrollado en el apartado 6.2. *Masas equivalentes*, para el estudio con una velocidad angular constante, se definen las masas equivalentes de los componentes en sus uniones. Es importante siempre trabajar con las unidades adecuadas, por este motivo durante la simulación se emplea siempre el Sistema Internacional de unidades. Para resolver las expresiones de este apartado, los datos necesarios son los siguientes:

Tabla 1: Dimensiones y masas del mecanismo de estudio.

Magnitud	Valor
r	0,037 m
l	0,1175 m
r/l	0,31915
l_a	0,08692 m
l_b	0,03056 m
r_{G2}	0,00474 kg
m_2	5,5892 kg
m_3	0,3589 kg
m_4	0,5824 kg

Estos datos numéricos han sido extraídos de las características de un motor diésel monocilíndrico MINSEL M380, sobre un proyecto sobre simulación dinámica de este mecanismo, para darle realismo al estudio. Una vez resueltas las ecuaciones, se obtienen los valores de las masas concentradas necesarias para desarrollar las expresiones.

Tabla 2: Valores de las masas concentradas

Masas de los componentes	Valores (kg)
m_{3a}	0,09329
m_{3b}	0,2656
m_{2a}	0,69354
m_A	0,78684
m_B	0,848

Otro aspecto geométrico a tener en cuenta sobre este modelo, es el descentramiento nulo del pistón. Al plantear esta consideración, se obtiene un modelo con una excentricidad nula.

En la figura siguiente se esquematiza este fenómeno. Cuando el centro del cilindro presenta un descentramiento respecto del centro del cigüeñal, a la distancia de desplazamiento se le llama excentricidad o como en la figura *Offset*. Esta excentricidad se encarga de reducir la resistencia entre el pistón y la pared interior del cilindro durante la carrera de expansión debida a la presión de la combustión. Pero esta misma excentricidad es la culpable de aumentar el momento que se genera. Por tanto, se tendrá que llegar a una solución de compromiso durante su diseño. Además, en un motor sin *offset* la explosión no favorece el giro en un sentido concreto, al estar el conjunto cigüeñal-biela-pistón alineados.

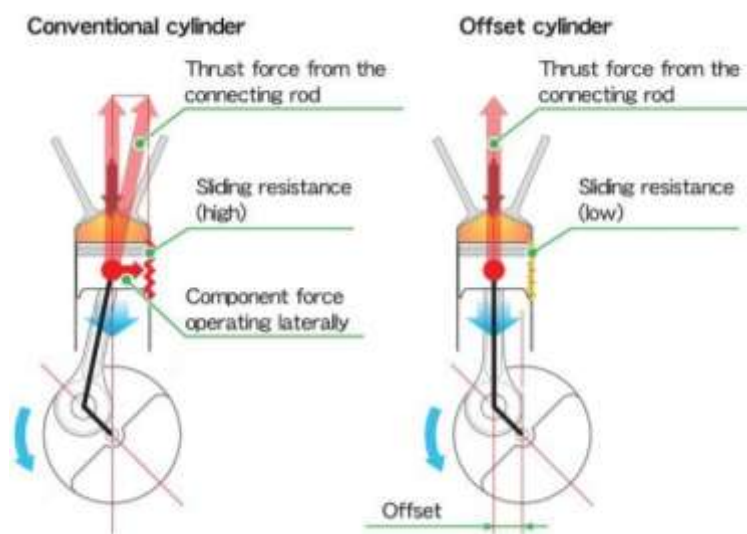


Fig. 17: Diagrama conceptual del descentramiento de un cilindro.
 (<https://rideapart.com/articles/free-power-offset-cylinders-explained>)

7.3. Elaboración del libro de Excel

La herramienta que se usará para desarrollar esta tarea será Microsoft Excel, donde se elaborarán las tablas y las gráficas que definan el comportamiento del sistema en movimiento durante un ciclo completo. Las gráficas mostrarán el comportamiento del mecanismo en cada una de las carreras del ciclo, es decir, al trabajar con un motor de 4 tiempos, para completar un ciclo será necesario una rotación de 720° o lo que es lo mismo, dos vueltas completas de la manivela.

En esta simulación también se ha representado la evolución del conjunto trabajando a diferentes regímenes del motor, para poder evaluar el efecto de esta variable. En la hoja de Excel aparecen los valores constantes necesarios para resolver los sistemas de ecuaciones, tales como la velocidad angular, la longitud de la biela o el radio de la manivela.

Por otro lado, aparece el valor del ángulo que va tomando la manivela ($\omega \cdot t$). Habría que explicar que el avance de los ángulos se ha tomado de tres en tres, debido al método de obtención de la fuerza del gas, el cual se detalla más adelante.

Se han separado las fuerzas de inercia de los momentos de inercia, así como los momentos debidos a la fuerza del gas. Una vez estos tres grandes bloques diferenciados, dentro de cada uno de ellos se han separado los diferentes componentes en función del armónico que representan. Mediante este desglose se obtiene un mayor detalle en los resultados, con el fin de interpretar cuál es la acción de cada término o bien su relevancia en el cómputo global.

Por lo tanto, las fuerzas de inercia se han desglosado en las generadas en el eje Y y en el eje X, y estas, a su vez, en las respectivas componentes primaria, secundaria... que conforman los diferentes armónicos que aparecen en la expresión total. Para obtener un error inferior al 1%, se han escogido hasta los términos de la quinta armónica, es decir, 5θ , este incluido, de las expresiones que definen las fuerzas y los momentos. La justificación de esta elección queda claramente detallada en los *ANEXOS: 2. Validación de la precisión de las expresiones*, donde se comprueba que el error cometido es ínfimo, y los valores representan el comportamiento real del mecanismo.

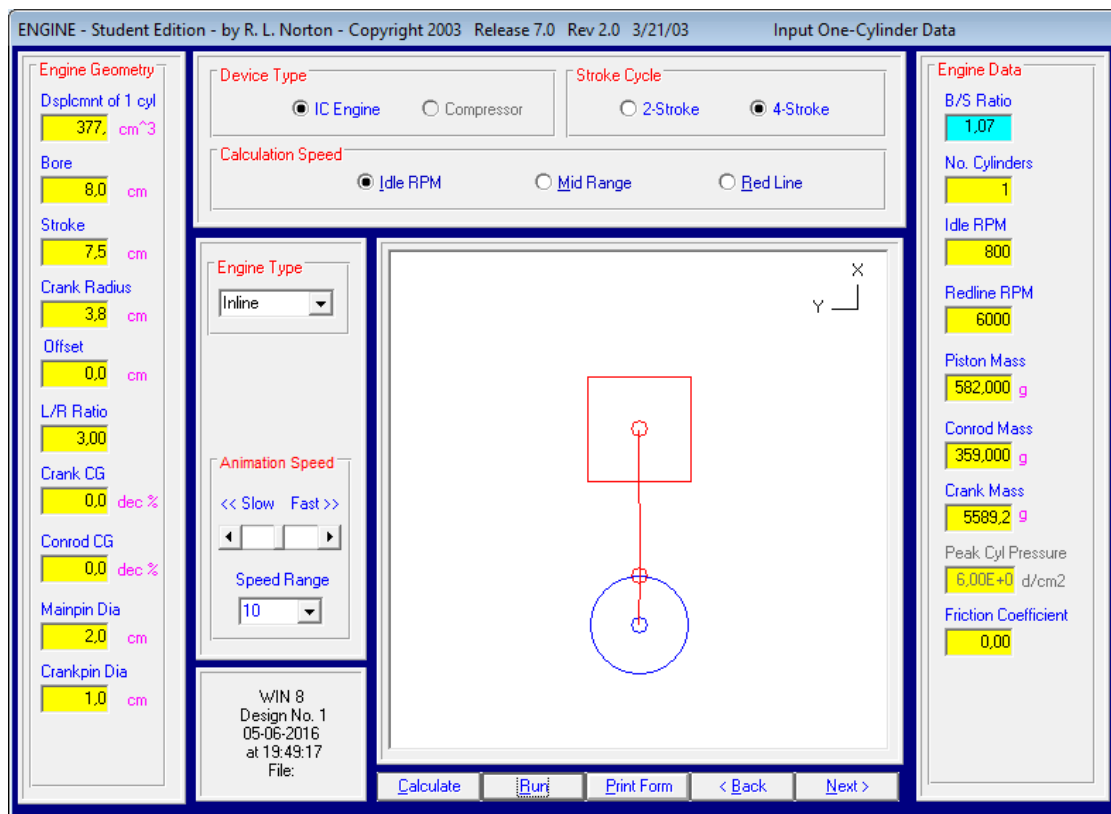
Se obtienen finalmente unas gráficas con el avance del valor de ωt , en el eje de las abscisas, y cada una de ellas representara la fuerza o el momento que corresponda desglosadas en los armónicos que presenten.

Tal y como se ha mencionado anteriormente, se han elaborado las mismas operaciones para tres regímenes distintos; a bajas revoluciones o ralenti (800 rpm), a media potencia (3.500 rpm) y a máxima potencia (6.000 rpm). Gracias a ello se podrá evaluar en un apartado posterior como afecta la velocidad angular en cada término de estudio.

7.4. Obtención del momento de gas mediante ENGINE

Respecto el momento del gas, este queda definido en función del valor que tome la fuerza del gas, ya que son directamente proporcionales tal y como se puede observar en su expresión. Esta fuerza que actúa en el eje X, su acción queda anulada al compensarse con la bancada. El valor de esta fuerza es el mismo, solo que al actuar en un sentido hace avanzar el pistón y en el sentido contrario se encuentra la bancada del motor. Sin embargo, sí que genera un momento. La fuerza del gas no es constante a lo largo del ciclo, ya que solo se produce durante la expansión debida a la combustión de la mezcla en un período del ciclo (carrera de explosión) por lo que habrá que considerarla variable a lo largo del avance del pistón. Además, no es fácil establecer un modelo de comportamiento, ya que el exponente de la politrópica ($PV^n = cte$) depende de la composición química de los gases, que varía durante la combustión. Por este motivo, a partir del programa sobre dinámica de motores ENGINE, programa proporcionado en el libro Norton, Robert L. (2005) *Diseño de Maquinaria*, se han extraído los valores de la fuerza del gas a lo largo del ciclo. Estos valores fueron obtenidos experimentalmente.

Tal y como aparece en las figuras siguientes, se han introducido los parámetros de trabajo, en este caso con las unidades de cgs (centímetros-gramos-segundos) para que el programa pudiera funcionar correctamente, ya que con el SI habría demasiadas cifras decimales y se producía un desbordamiento en el programa. Se ha marcado la opción de un solo cilindro de 4 cuatro tiempos, así como el régimen de vueltas. En la figura siguiente se pueden ver los parámetros requeridos por el programa, que el usuario debe introducir para poder ejecutarlo.



ENGINE - Student Edition - by R. L. Norton - Copyright 2003 Release 7.0 Rev 2.0 3/21/03 Input One-Cylinder Data

Engine Geometry	Device Type	Stroke Cycle	Engine Data
Displcmnt of 1 cyl 377. cm ³	<input checked="" type="radio"/> IC Engine <input type="radio"/> Compressor	<input type="radio"/> 2-Stroke <input checked="" type="radio"/> 4-Stroke	B/S Ratio 1.07
Bore 8.0 cm	Calculation Speed <input checked="" type="radio"/> Idle RPM <input type="radio"/> Mid Range <input type="radio"/> Red Line		No. Cylinders 1
Stroke 7.5 cm	Engine Type Inline		Idle RPM 800
Crank Radius 3.8 cm	Animation Speed << Slow Fast >>		Redline RPM 6000
Offset 0.0 cm	Speed Range 10		Piston Mass 582,000 g
L/R Ratio 3.00			Conrod Mass 359,000 g
Crank CG 0.0 dec %			Crank Mass 5589.2 g
Conrod CG 0.0 dec %			Peak Cyl Pressure 6.00E+0 d/cm2
Mainpin Dia 2.0 cm			Friction Coefficient 0.00
Crankpin Dia 1.0 cm			

WIN 8
Design No. 1
05-06-2016
at 19:49:17
File:

Calculate Run Print Form < Back Next >

Fig. 18: Introducción de datos en el programa ENGINE

A continuación se puede observar el comando del programa para poder extraer los resultados. Se ha marcado la opción *Disk File* para poder obtener la tabla de valores. Luego se selecciona el formato deseado, en este caso el *Gas Force*. También aparecen otras vías para obtener los resultados, visualizarlos por pantalla o bien imprimirlos directamente. Como se puede apreciar, ENGINE es un programa muy completo con el cual se pueden obtener multitud de gráficos introduciendo los parámetros del modelo que se desee simular.

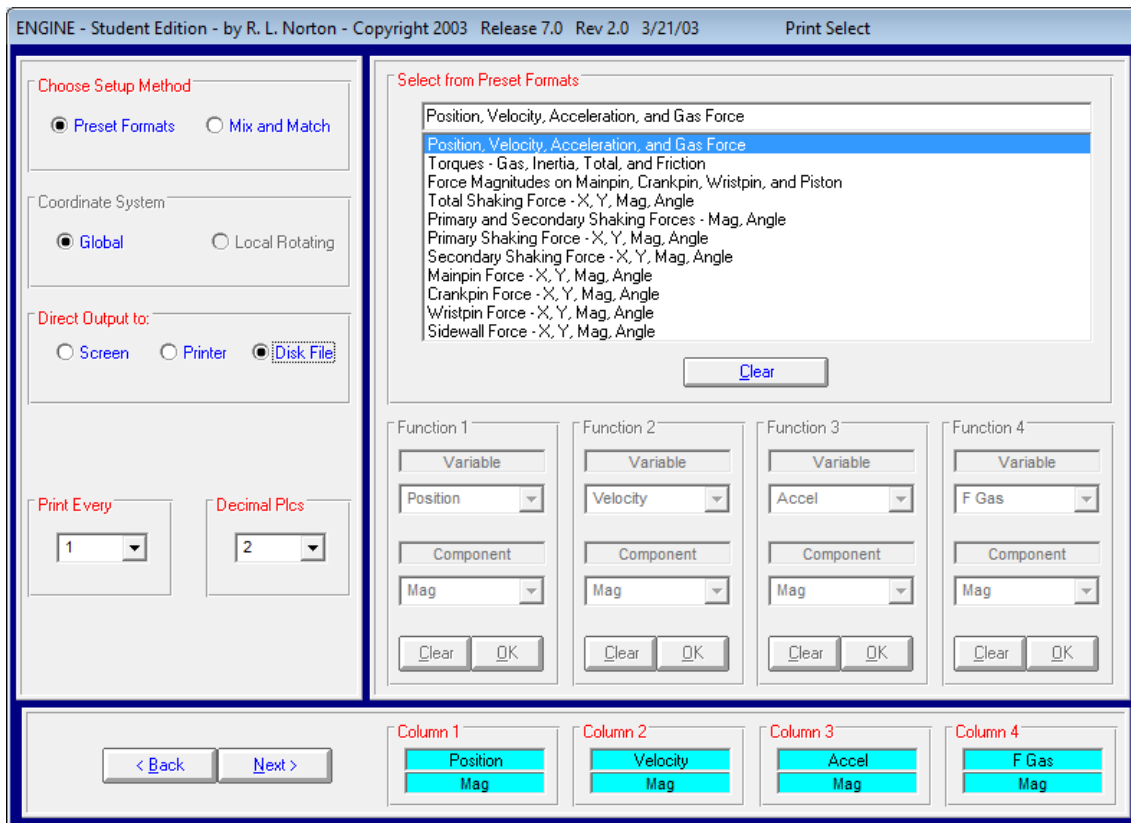


Fig. 19: Extracción de los datos deseados

Se obtendrá un archivo que contendrá la tabla con los valores de los parámetros solicitados, se procederá a abrir dicha hoja con Excel. En ella, la fuerza del gas está en unidades Dyne, por lo que previamente habrá que pasarla a Newtons ($1 \text{ dyne} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ N}$). También se observa como la evolución del ángulo de giro avanza de tres en tres, por lo que el modelo general también lo hará de este modo para poder disponer del valor de la fuerza del gas en cada uno de estos instantes. Ahora ya se puede proceder al cálculo de los momentos de gas. Los valores de esta tabla son los representados en la Fig. 16 anterior, dónde se muestra el comportamiento del pistón y de la fuerza del gas durante el ciclo.

Con el fin de obtener una gráfica sobre la expresión de la fuerza del gas realista, se ha extraído de este programa de simulación de motores. Como en este estudio no se detallarán aspectos termodinámicos sobre las explosiones que se producen debido a su alta complejidad e influencia de infinidad de variables. Se parte de los valores generados por el modelo de este programa, que contempla los aspectos más relevantes y aporta valores verídicos.

7.5. Análisis de la simulación monocilíndrica

Una vez quedan definidos todos los valores y las expresiones introducidas, se procede a su correspondiente representación gráfica en función del ángulo de giro. Previamente, es importante especificar un par de puntos para obtener una visión de lo que sucede en esta simulación.

Se considerará que, durante la carrera de explosión, la combustión de la mezcla y la expansión de los gases consecuente será un proceso ideal para todas las revoluciones. En una situación más real, las explosiones que tienen lugar en la cámara de combustión dependen de muchos parámetros, los cuales varían en cada momento, en función del régimen, de la demanda de potencia, la temperatura de los elementos que intervienen, la presión... Debido a la complejidad de este proceso, este se supondrá ideal, ya que este estudio se centra en las reacciones que se producen en el motor.

Otra hipótesis a tener en cuenta, es el desprecio de los efectos del rozamiento que se consideraran nulos. Tratando un modelo más preciso, se incluirían el efecto de las pérdidas debidas al rozamiento entre los componentes en movimiento, que se opondrán a este mismo. Sin rozamiento, se obtiene pues una visión más global, pero que también se desajusta el comportamiento real despreciando dichas pérdidas.

Respecto a las magnitudes dinámicas obtenidas, se adjuntan todo seguido las diferentes representaciones para el sistema funcionando a una velocidad angular de 3.500 rpm (revoluciones por minuto):

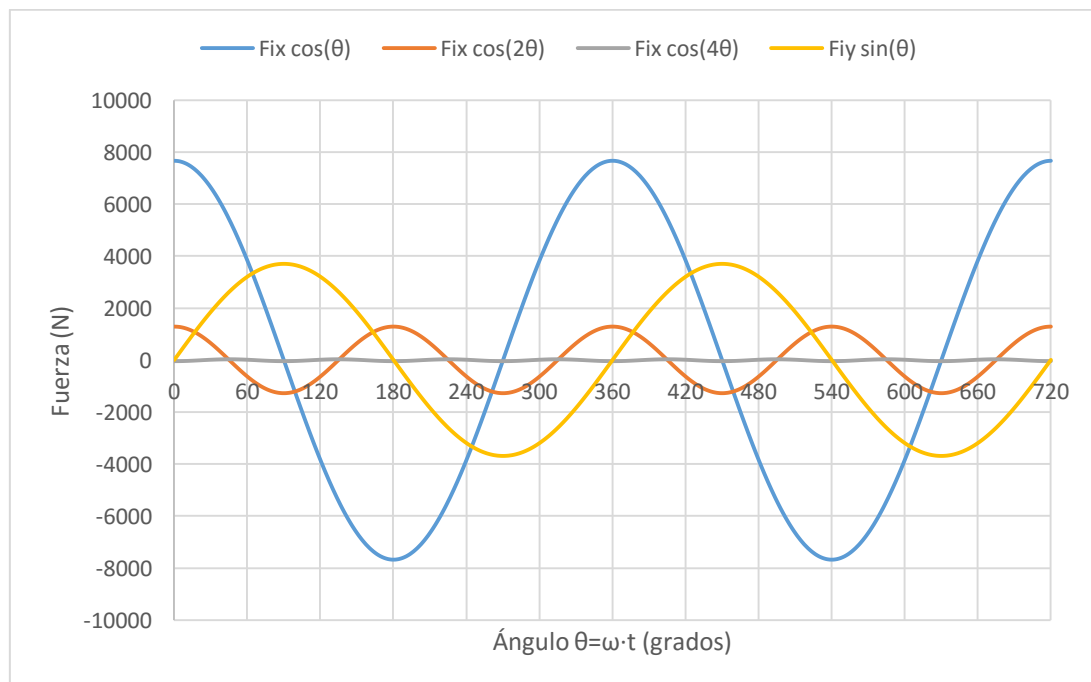


Gráfico 2: Representación de las componentes de las fuerzas de inercia

Este gráfico muestra el desglose de las fuerzas de inercia que se generan en el motor en un ciclo completo. Cabe destacar cómo la primera armónica presenta una amplitud mayor. Por lo tanto, la componente del cuarto armónico es la que presenta una relevancia menor, que se podría considerar casi despreciable, comparándola con la primera o la segunda. En la figura también se aprecia la oscilación de cada término, a mayor armónico mayor es la frecuencia.

Comparando los términos en función del eje, tomando el primer término como referencia ya que en el eje Y solo aparece este, se comprueba que la fuerza en el eje de las X presenta una clara dominancia de aproximadamente el doble, con un cierto desfase entre los valores de amplitud máxima.

Con lo que respecta al gráfico de los momentos de inercia o sacudida, se ha desglosado en los cinco armónicos que aparecen en la expresión de los momentos de inercia obtenida en el apartado anterior 6.3.2. *Pares de torsión de inercia y de sacudimiento*. La evolución a lo largo de las dos vueltas del cigüeñal es sinusoidal, como era de esperar. Si se observa más detenidamente, el segundo y tercer armónico presentan una mayor amplitud respecto al primero, lo cual se diferencia respecto el gráfico de las fuerzas anterior.

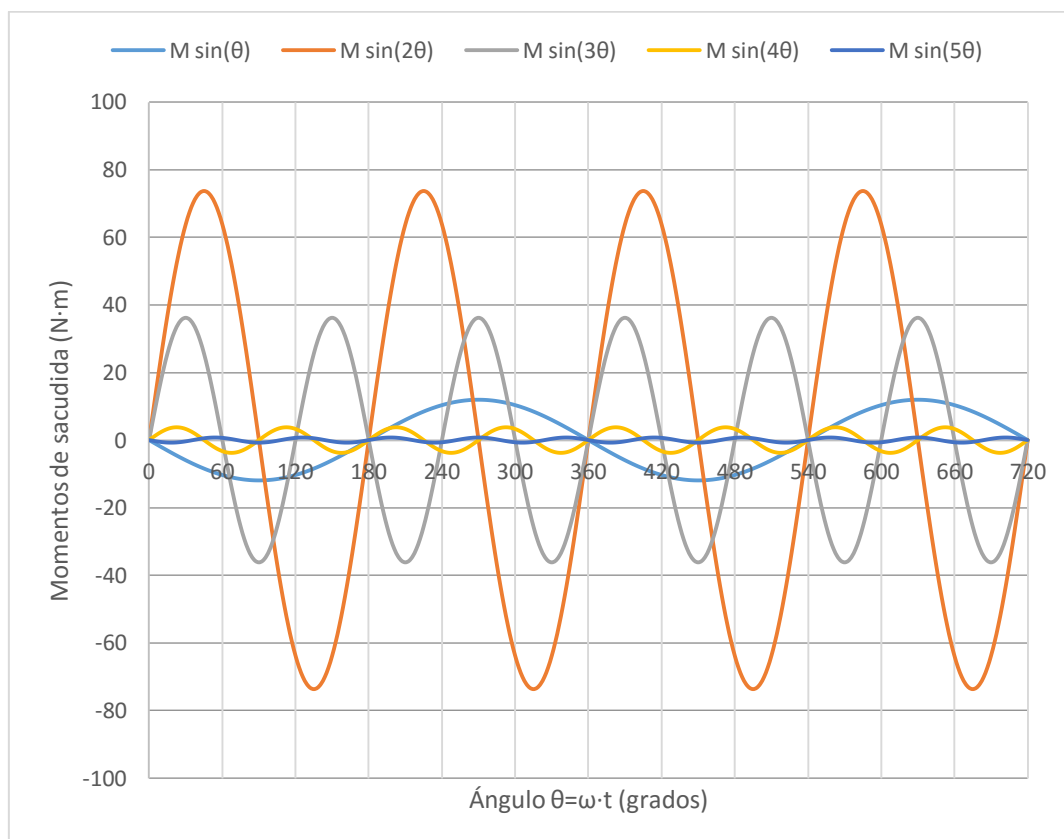


Gráfico 3: Representación de las componentes de los momentos de sacudida

Al depender todo el conjunto del valor del ángulo de la manivela, el valor de los armónicos de este momento variará en función de la posición instantánea que tome el mecanismo. Se sabe que la fuerza que se transmite tiene la dirección de la biela, y esta fuerza se descompone en los ejes X e Y. A lo largo de un ciclo se dan lugar posiciones características que afectan al comportamiento global. Dos de estas se producen cuando el pistón se encuentra en su PMS, es decir, completamente estirado sobre el eje X. En este punto, existe la fuerza máxima, pero al estar en línea con el cigüeñal el momento que aparece es prácticamente nulo.

Otra situación singular tiene lugar cuando el pistón está cerca del PMI, con la biela formando un ángulo recto respecto al eje X. En este punto, el brazo de momento es el mayor posible, pero la fuerza es casi nula. Por lo tanto, el resultado global es nulo. Estas situaciones singulares degeneran en una competición entre los efectos de cada componente del momento sobre el mecanismo biela-manivela. Por este motivo, los momentos primarios no son los gobernantes, sino más bien que los secundarios y terciarios.

Este fenómeno se puede observar en el archivo de Maple adjunto como anexo a este estudio (*Validación.mw*). En él aparecen los *plots* de cada término, y haciendo especial énfasis en la representación del M_{Fi14} , en el que aparece la expresión sin ningún tipo de simplificación, se observa como la curva está ladeada, demostrando como las armónicas de orden superior a la primera tienen una relevancia mayor.

Por último, se encuentra el gráfico del momento del gas. Debido a que la fuerza del gas es una constante de la cual depende el momento del gas, esta se asemeja a la forma que toma la fuerza para el ciclo del motor de cuatro tiempos. Esta semejanza se puede observar con respecto al *Gráfico 4*. Esta función permanecerá constante para cualquier velocidad angular simulada, ya que es una idealización del sistema.

Comentando la forma que toman las curvas, se observa una clara dominación del primer armónico, con un valor pico muy elevado en el instante de la explosión donde la presión en la cámara es máxima. A continuación, aparece el segundo armónico, con valores ya inferiores, incluso negativos en un cierto punto. Por último, el término de cuatro veces el ángulo se podría llegar a considerar nulo, ya que su aportación al momento de gas es despreciable respecto a los términos anteriores. En el punto final, antes de retomar un nuevo ciclo, se observa cómo se generan unos momentos negativos, lo que se traduce en momentos que se oponen al movimiento, es decir, resistivos. Tiene lógica pensar que antes de la explosión el pistón coja energía el sistema para comprimir la mezcla durante la carrera de compresión antes de la de explosión.

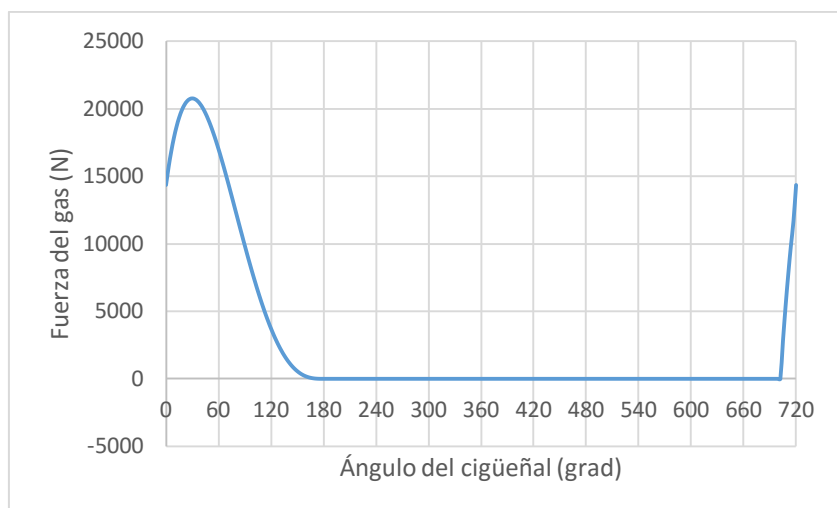


Gráfico 4: Representación de la fuerza del gas durante un ciclo

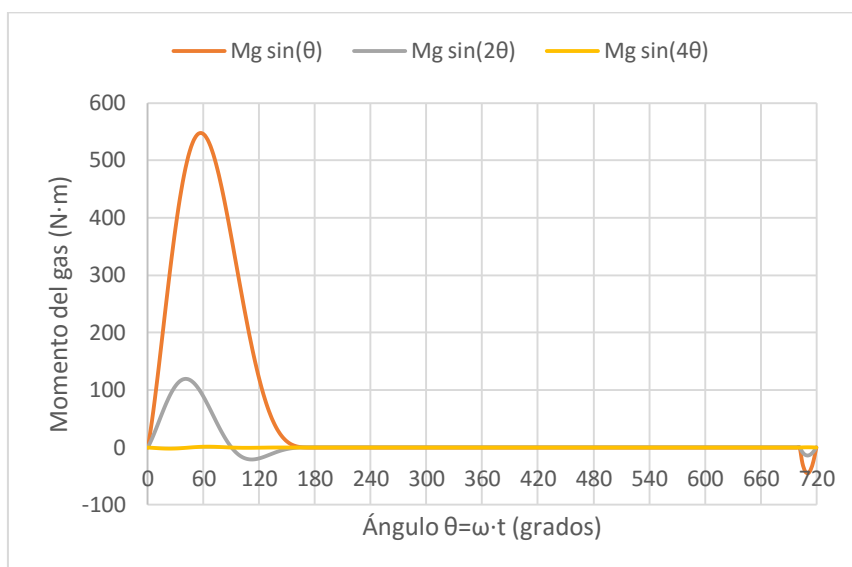


Gráfico 5: Representación de las componentes del momento del gas

Para concluir, estas representaciones son las obtenidas para una velocidad angular concreta, particularmente con 3.500 rpm (media potencia). Pero en un archivo de Excel que aparecerá adjunto a esta memoria, se encuentran las mismas representaciones que trabajan a diferentes regímenes de vueltas. Se han usado pues a una velocidad menor y otra mayor, 800 y 6.000 rpm, respectivamente. La finalidad es poder comprobar cómo afecta la velocidad de giro del cigüeñal a los términos de las fuerzas y pares generados.

Los resultados obtenidos indican que hay una proporcionalidad directa de este valor con respecto las fuerzas y pares. A mayor velocidad angular, mayor será la amplitud de las fuerzas y los momentos, y viceversa. Se vuelven a repetir las mismas formas de los gráficos anteriores, cambiando tan solo los valores numéricos. La predominancia de cada armónico se mantiene constante, indiferentemente del régimen de trabajo.

Para proporcionar una visualización rápida del comportamiento en función del régimen del motor, se han elaborado los siguientes gráficos sobre los componentes totales, como suma de los distintos armónicos que lo forman:

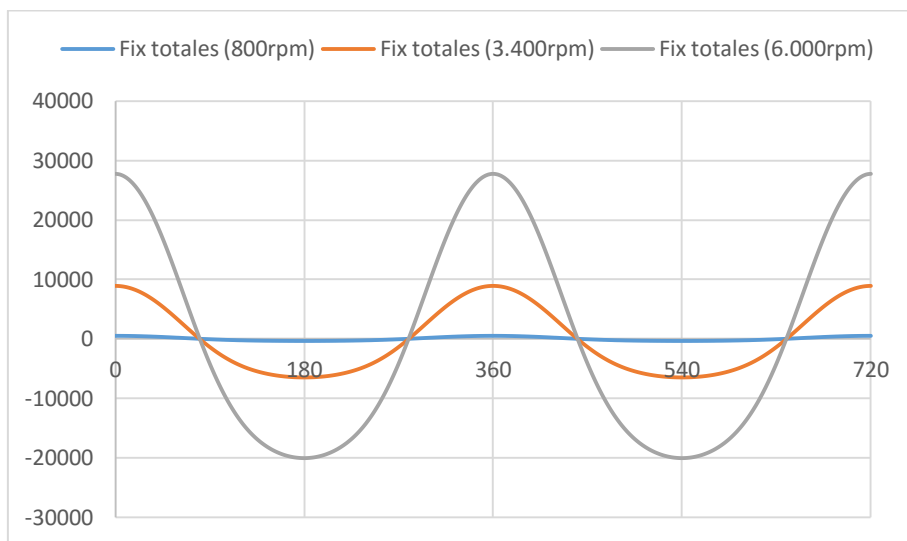


Gráfico 6: Representación de las fuerzas de inercia totales en el eje X bajo tres regímenes distintos

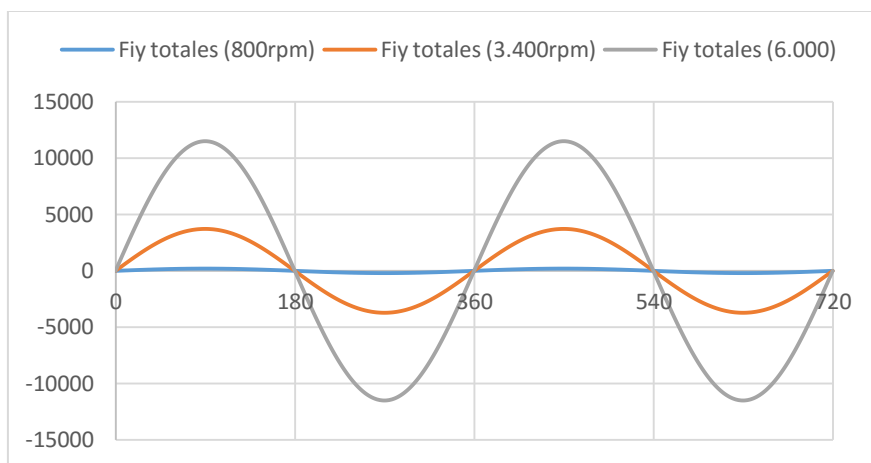


Gráfico 7: Representación de las fuerzas de inercia totales en el eje Y bajo tres regímenes distintos

Se puede observar como aumentan las amplitudes de las funciones que representan una mayor velocidad de giro del cigüeñal. Los puntos donde se producen los picos son siempre en los mismos instantes del ciclo. Las fuerzas a un régimen bajo de vueltas se podrían llegar a considerar despreciables, teniendo en cuenta el valor que toman a mayores velocidades.

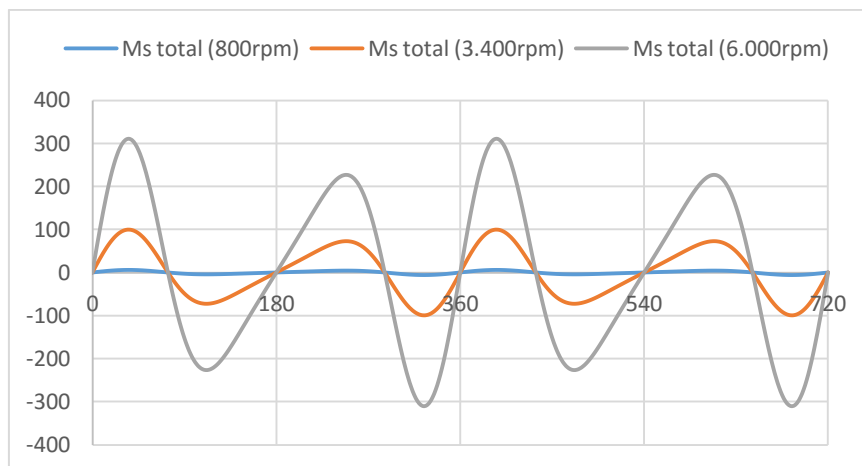


Gráfico 8: Representación de los momentos de sacudida totales bajo tres regímenes distintos

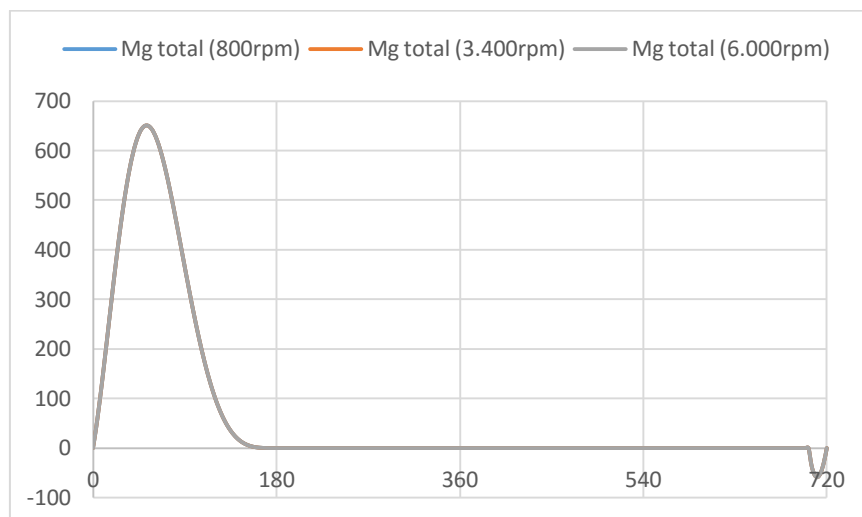


Gráfico 9: Representación de los momentos del gas totales bajo tres regímenes distintos

Respecto los momentos, se puede generalizar la explicación antes mencionada para las fuerzas de inercia. Sin embargo, si comentamos la superposición de las funciones de los momentos del gas. Al suponer un ciclo ideal, la fuerza de gas es la misma para cada caso. Consecuentemente, los momentos de gas también serán los mismos. La diferencia reside en que a mayor número de rpm, mayor será la cantidad de explosiones que se produzcan en un período de tiempo, suministrando así mayor potencia.

8. Aplicación de la simulación numérica

Una vez estudiado el mecanismo biela-manivela en los apartados anteriores, ahora se realizará el estudio para motores de combustión interna con configuraciones multicilíndricas. Como consideraciones iniciales, es conocido que algunos inconvenientes respecto las fuerzas de sacudimiento y pares de torsión se pueden llegar a solventar combinando debidamente diversos mecanismos biela-manivela en el mismo cigüeñal.

Tal y como se esclareció en los puntos anteriores sobre un cilindro, en estos apartados que vienen a continuación no se entrará en materia respecto los aspectos termodinámicos que suceden en los motores de combustión interna, más allá de las fuerzas del gas que impulsen el sistema.

Se pretende pues estudiar la cinemática y la dinámica de los motores convencionales multicilíndricos y descubrir el desequilibrio que presentan cada uno de ellos. El escalón final al que se pretende llegar es establecer el ángulo óptimo de un motor de 6 cilindros en V que mejor equilibrado quede, por lo que previamente se realizará el estudio de otras configuraciones con motores del mismo número de cilindros; en línea y cilindros opuestos o bóxer, respectivamente. Existen multitud de configuraciones para los cilindros, algunas de ellas se detallan en la *Fig. 20* que aparece a continuación, así como con diferente número de cilindros. Las dimensiones variarán en función de sus características.

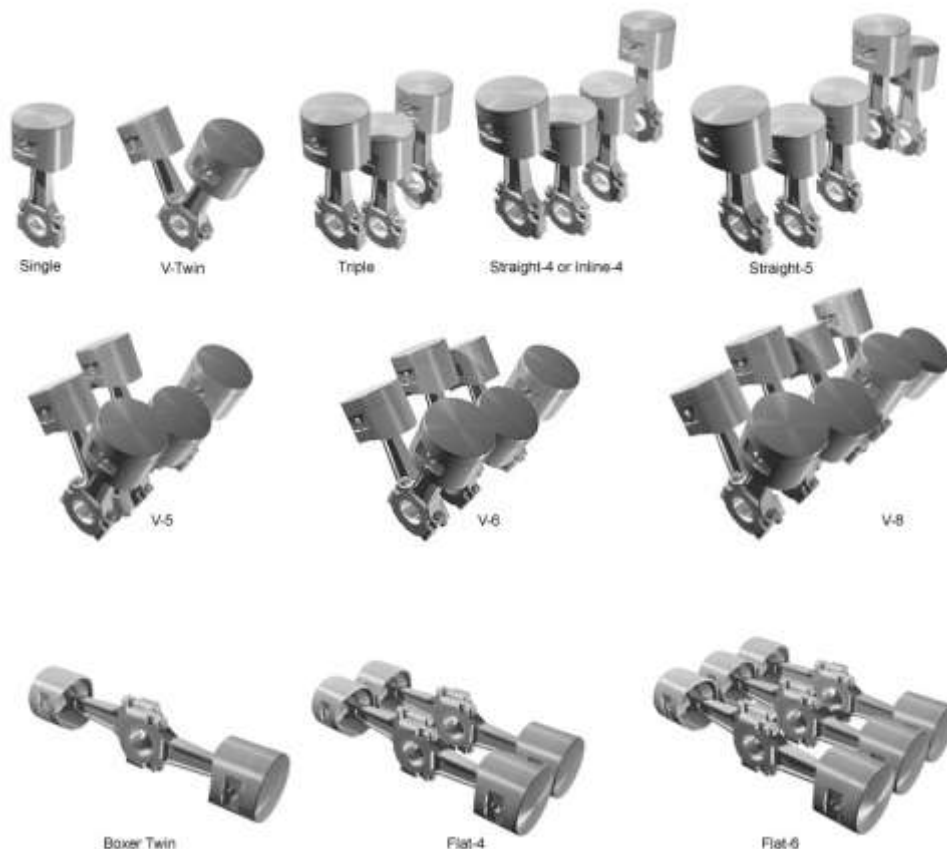


Fig. 20: Configuraciones diversas de motores multicilíndricos.
(<https://ifunny.co/tags/configurations>)

8.1. Estudio de 6 cilindros en línea

Esta configuración es la más común de todas en el mercado de la automoción, utilizada en vehículos particulares para el transporte diario. Puede encontrarse motores de tres, cuatro, cinco y seis cilindros en línea, pese a que el de cuatro es la opción más utilizada. Es la más simple ya que presenta los cilindros en un solo plano. En la Fig. 21 se puede observar como cada uno de los pistones dispone de su propia biela-manivela, en un único cigüeñal.

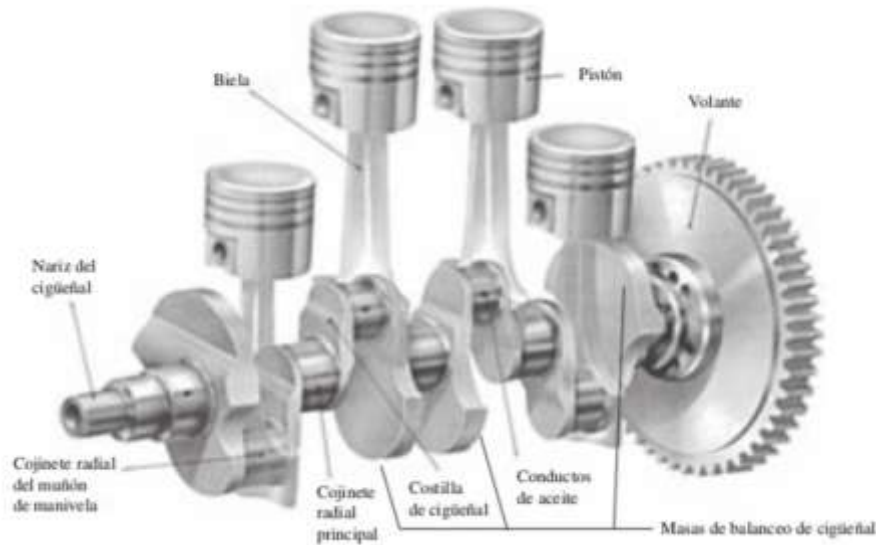


Fig. 21: Cigüeñal de un motor de cuatro cilindros en línea con pistones, cigüeñal y volante.
 (Ilustraciones copyright Eaglemass Publications / Car Care Magazine)

Es importante la disposición de los codos del cigüeñal, ya que gracias a este ángulo de fase entre ellos se consigue distribuir el movimiento de cada pistón a lo largo del ciclo. Después de haber desarrollado el estudio de fuerzas y momentos en los apartados anteriores, la situación ideal de trabajo sería disponer los pistones de tal manera que se movieran en sentidos opuestos al mismo tiempo, compensando así las fuerzas de inercia. Por tanto, el ángulo de fase entre los codos del cigüeñal dependerán tanto del número de cilindros como del número de ciclos, dos o cuatro dependiendo del motor.

Normalmente, existe una disposición concreta con la cual se cumple este fin. Por ejemplo, aprovechando la figura anterior, esta distribución de ángulos quedaría tal que así; 0-180-180-0°, obteniendo la distribución óptima para un motor de 4 cilindros en línea.

En cualquier cigüeñal de un motor, este presenta 360° que es una vuelta completa. En la configuración de estudio se tienen seis cilindros con un motor de cuatro tiempos. Por lo tanto, el ángulo de fase $\Delta\phi$ óptimo entre los codos del cigüeñal para lograr la máxima cancelación de las fuerzas de inercia será:

$$\Delta\phi = \frac{2 \text{ ciclos} * 360^\circ}{n_{\text{cilindros}}} = \frac{2 * 360}{6} = 120^\circ$$

Para establecer una referencia de estos ángulos de fase se propone la siguiente convención:

- El primer cilindro (frontal) será el número 1 y siempre con un ángulo de fase cero. Será el cilindro de referencia para el resto.
- Los ángulos de fase de los demás cilindros se medirán respecto al codo del cigüeñal del cilindro 1.
- Los ángulos de fase se miden internos al cigüeñal, con respecto a un sistema coordinado rotatorio situado en el primer codo.
- Los cilindros se numeran consecutivamente de adelante hacia atrás del motor.

A partir de un diagrama de fase de la manivela se observa la posición de cada pistón a lo largo de un ciclo completo. Tomando como referencia el PMS, se podría ver como cada uno pasa dos veces por esa posición, pero con el ángulo de desfase correspondiente a esta configuración de 6 cilindros. Al tomar el primer pistón como referencia, este empezaría en el PMS. El segundo pistón llega a esa posición 120° después, es decir, van retrasados 120° entre ellos que es el ángulo entre las muñequillas del cigüeñal, el cual tiene 5 puntos de apoyo.

La distribución se realiza por parejas, de los extremos hacia dentro (1-6; 2-5; 3-4), garantizando así el equilibrado dinámico del cigüeñal. Para un motor de seis cilindros en línea el orden de encendido es: 1 – 5 – 3 – 6 – 2 – 4.

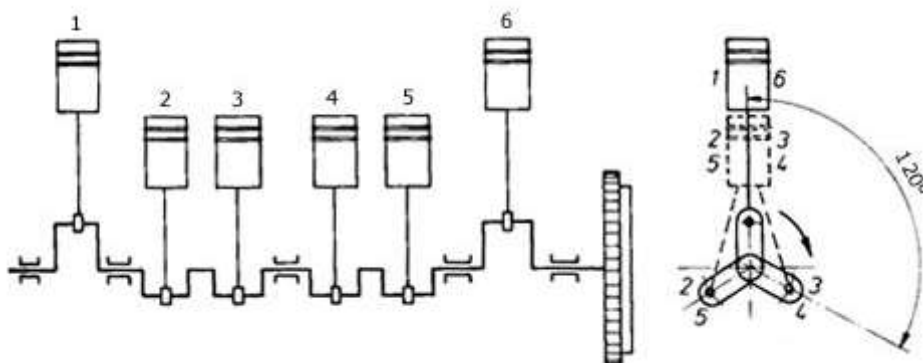


Fig. 22: Motor de 6 cilindros en línea y su orden de encendido.
 (<http://www.aficionadosalamecanica.net/motor-arquitectura.htm>)

Tabla 3: Diagrama de fase de un motor de 6 cilindros en línea

	0°	180°	360°	540°	720°
1	Explosión				
2				Explosión	
3			Explosión		
4					Explosión
5		Explosión			
6			Explosión		
	120°	120°			
1 ciclo de 4 Tiempos					

Es de relevancia explicar cómo se han distribuido las explosiones a lo largo del ciclo. Respetando el orden de encendido para esta distribución, las curvas de fuerza del gas de cada uno de los cilindros se han escalonado a partir del ángulo cero del primer cilindro, que es el que comienza en la carrera de explosión. El siguiente sería el número 5, que empezaría a -120° . Cuando llegará a cero, este haría explosión, encontrándose alrededor del pico máximo de fuerza de gas. De este modo, se irían sucediendo el resto de explosiones. Como recordatorio, el sistema de giro se considera antihorario.

8.1.1. Fuerzas de sacudimiento en un motor en línea

En el estudio teórico antes realizado ya se encontró la expresión completa, hasta el quinto armónico, de la fuerza de inercia que se genera. Ahora se requiere encontrar la fuerza de sacudimiento total resultante de esta disposición del ángulo de fase establecida. Si se considerarán tan solo las componentes hasta el segundo orden, excluyendo el resto de armónicas, se tendría que:

$$F_s = \left[m_A r \omega^2 \cos(\omega t) + m_B r \omega^2 \left(\cos(\omega t) + \frac{r}{l} \cos(2\omega t) \right) \right] \hat{i} + [m_A r \omega^2 \sin(\omega t)] \hat{j}$$

En motores multicilíndricos cada codo del cigüeñal está contrapesado para eliminar los efectos de estas fuerzas de sacudimiento de la masa concentrada m_A (masa de la biela y la manivela) situada en el muñón de la manivela. Si los ángulos de fase se distribuyen de tal manera que se cancelen los efectos de las masas recíprocas en los pasadores del pistón la necesidad de sobrebalancear el sistema será menor.

En motores de tres o más cilindros en línea no es necesario este sobrebalanceo, pero no es posible con algunas configuraciones bicilíndricas. A veces también se debe sobrebalancear con el fin de reducir las fuerzas de apoyo en el muñón principal. Al añadir las masas de balanceo, el producto mr sería igual a $m_A r_A$ en cada uno de los codos. Los términos que contienen m_A son eliminados obteniendo así:

$$F_s = \left[m_B r \omega^2 \left(\cos(\omega t) + \frac{r}{l} \cos(2\omega t) \right) \right] \hat{i}$$

En todos los montajes multicilíndricos aquí considerados, se supondrán con el mismo desplazamiento y con sus pistones y bielas intercambiables. Este hecho favorece tanto al balanceo dinámico como a la reducción de los costes en una etapa posterior de producción. Considerando todos los cilindros que intervienen, en la expresión de la fuerza de sacudimiento del bloque motor, aparecerá el término del ángulo de fase entre los codos del cigüeñal, donde $\phi_1 = 0$:

$$F_s = m_B r \omega^2 \sum_{i=1}^n \left[\cos(\omega t - \phi_i) + \frac{r}{l} \cos 2(\omega t - \phi_i) \right] \hat{i}$$

Al aplicar la identidad trigonométrica siguiente y factorizar resulta que:

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$F_s \cong m_B r \omega^2 \left[\begin{array}{c} \cos \omega t \sum_{i=1}^n \cos \phi_i + \sin \omega t \sum_{i=1}^n \sin \phi_i \\ + \frac{r}{l} (\cos 2\omega t \sum_{i=1}^n \cos 2\phi_i + \sin 2\omega t \sum_{i=1}^n \sin 2\phi_i) \end{array} \right] \hat{i}$$

Recordar que esta expresión representa una aproximación contando tan sólo hasta el segundo armónico, y tal y como se desarrolló en apartados anteriores se escogieron hasta el quinto término en las expansiones binomiales al sustituir. Sin embargo, en la expresión de *Fixaprox5* aparecen términos con el cuarto armónico. Estas fórmulas sirven para explicar el equilibrado de fuerzas.

Considerando que el valor de la fuerza de sacudimiento deseado es cero, la expresión será nula para todos los valores que tome ωt cuando:

Tabla 4: Balanceo de las fuerzas de sacudimiento

Fuerzas primarias:	$\sum_{i=1}^n \cos \phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^n \sin \phi_i = 0$
Fuerzas secundarias:	$\sum_{i=1}^n \cos 2\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^n \sin 2\phi_i = 0$
Fuerzas de cuarta armónica:	$\sum_{i=1}^n \cos 4\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^n \sin 4\phi_i = 0$

Existe pues una combinación particular de ángulos ϕ_i que cancelaría la fuerza de sacudimiento. Después de escoger la distribución de ángulos para el motor con el que se trabaje, se desarrollan estas ecuaciones. Aquellas que sumen cero, no tendrán dicha componente. Aclarar que a mayor armónica menor será la contribución a la expresión global de la fuerza, llegando incluso a poder despreciarlas dependiendo de los valores resultantes.

En el caso de este estudio, cogiendo como base la simulación realizada para un único pistón se desarrollará la simulación numérica para este motor de seis cilindros en línea. El modelo será el mismo para cada pistón, modificando los ángulos ωt para introducir el desfase entre pistones. En una hoja final se sumarán las fuerzas de sacudimiento componente a componente para poder evaluarlas. En conveniente mencionar, que el modelo usado contiene las expresiones completas, en el caso de las fuerzas de inercia hasta el cuarto armónico. Se obtendrá pues una mayor precisión para poder ver cómo evolucionan a lo largo del ciclo.

8.1.2. Par de torsión de inercia en un motor en línea

Recuperando la ecuación del par de inercia que se definió en apartados anteriores para un sólo cilindro, al superponerse con el par de torsión del gas, sería necesario reducirlo a cero. Este no aporta nada al par de torsión motriz neto, debido a que su valor promedio siempre es nulo. Sin embargo, sí que genera grandes oscilaciones en el par total perturbando su uniformidad.

Estas oscilaciones se pueden suavizar hasta un valor límite añadiendo un volante de inercia adecuado al sistema, o si bien no, cancelar su efecto externo neto con una distribución adecuada de los ángulos de fase del motor. Estas oscilaciones, pese a ser ocultas externamente o forzando que sumen cero, siguen presentes en el cigüeñal. Como consecuencia, pueden haber fallos por fatiga torsional debido a un mal diseño de la pieza.

Tomando de nuevo unas ecuaciones más sencillas que contemplan tan solo hasta el tercer armónico, para poder visualizar mejor como se lograría equilibrar el sistema, se tiene que:

$$M_{i21} \cong \frac{1}{2} m_B r^2 \omega^2 \left(\frac{r}{2l} \sin \omega t - \sin 2\omega t - \frac{3r}{2l} \sin 3\omega t \right) \hat{k}$$

Considerando el resto de cilindros con sus ángulos de fase, sustituir la identidad y factorizar como antes, resulta que:

$$M_{i21} \cong \frac{1}{2} m_B r^2 \omega^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{r}{2l} \sin(\omega t - \phi_i) - \sin 2(\omega t - \phi_i) - \frac{3r}{2l} \sin 3(\omega t - \phi_i) \right) \hat{k}$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

$$M_{i21} \cong \frac{1}{2} m_B r^2 \omega^2 \left[\begin{array}{l} \frac{r}{2l} \left(\sin \omega t \sum_{i=1}^n \cos \phi_i - \cos \omega t \sum_{i=1}^n \sin \phi_i \right) \\ - \left(\sin 2\omega t \sum_{i=1}^n \cos 2\phi_i - \cos 2\omega t \sum_{i=1}^n \sin 2\phi_i \right) \\ - \frac{3r}{2l} \left(\sin 3\omega t \sum_{i=1}^n \cos 3\phi_i - \cos 3\omega t \sum_{i=1}^n \sin 3\phi_i \right) \end{array} \right] \hat{k}$$

Esta ecuación muestra el comportamiento del par de torsión de inercia en función del giro del cigüeñal y de los ángulos de fase entre los cilindros del motor en línea. En este caso, para hacer nulo este par deberían de volverse a cumplir las ecuaciones que aparecen en la *Tabla 3*, pero esta vez con el tercer armónico en lugar del cuarto.

Para la simulación, se han sumado cada uno de los armónicos de los pares generados en cada pistón. Sumados también en función de la posición angular de la manivela de cada uno de ellos, una vez considerado el ángulo de fase entre cilindros.

8.1.3. Momento de sacudimiento en un motor en línea

Se comienza aclarando que para el motor monocilíndrico con el que se comenzó el estudio es un mecanismo de un solo plano, dos direcciones o bidimensional. Por este motivo se puede balancear estáticamente. Pero los motores multicilíndricos son ya tridimensionales, al distribuirse los cilindros a lo largo del cigüeñal.

Ya se ha visto cómo se pueden llegar a balancear las fuerzas de sacudimiento, pero ahora aparecen momentos en el plano del bloque del motor debido a estas fuerzas. Habrá que recurrir a criterios de balanceo dinámico. En la siguiente figura aparece un motor de 4 cilindros en línea para esquematizar este comportamiento, pero el modelo se puede extrapolar a la configuración con 6 cilindros.

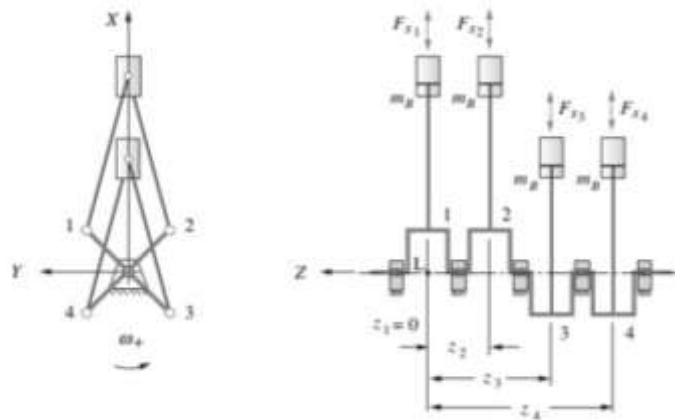


Fig. 23: Esquema del momento de sacudimiento. (Norton, Robert L. (2005) Diseño de Maquinaria)

Al tomar un punto arbitrario de referencia, como puede ser L, en línea con el primer cilindro, estas fuerzas generarán un momento con respecto a este punto. El momento en L total será la suma de los productos de cada una de estas fuerzas con la distancia respecto a L.

$$\sum M_L = \sum_{i=1}^n z_i \cdot F_{si} \hat{j}$$

Comentar, que el espaciado entre cilindros normalmente es uniforme. En este caso se ha considerado que existe una pared entre camisas de cilindros contiguos de 0,01 m. Esta distancia total será dos veces el radio más la constante, o lo que es lo mismo, el diámetro del pistón más el valor constante de la pared. Esta distancia aparece en las fórmulas de la simulación. Queda multiplicada por el número de veces que haya esta distancia respecto del punto L.

$$\delta = 2 \cdot r + 0,01 = B + 0,01 = 0,08 + 0,01 = 0,09 \text{ m}$$

$$z_2 = \delta$$

$$z_3 = 2 \cdot \delta$$

$$z_4 = 3 \cdot \delta$$

...

Recuperando la expresión de la fuerza de sacudimiento en función de los ángulos de fase, se obtiene que:

$$\sum M_L \cong m_B r \omega^2 \left[\cos \omega t \sum_{i=1}^n z_i \cdot \cos \phi_i + \sin \omega t \sum_{i=1}^n z_i \cdot \sin \phi_i + \frac{r}{l} \left(\cos 2\omega t \sum_{i=1}^n \cos 2\phi_i + \sin 2\omega t \sum_{i=1}^n \sin 2\phi_i \right) \right] \hat{j}$$

Las expresiones que derivan para que con todos los valores de ωt el momento sea nulo son:

Tabla 4: Balanceo de los momentos de sacudimiento

Momentos primarios:	$\sum_{i=1}^n z_i \cdot \cos \phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^n z_i \cdot \sin \phi_i = 0$
Momentos secundarios:	$\sum_{i=1}^n z_i \cdot \cos 2\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^n z_i \cdot \sin 2\phi_i = 0$
Momentos de cuarta armónica:	$\sum_{i=1}^n z_i \cdot \cos 4\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^n z_i \cdot \sin 4\phi_i = 0$

Las primeras componentes, de mayor magnitud, provocan que el motor cabecee hacia adelante y hacia atrás, debido a la oscilación del momento de positivo a negativo en el plano de los cilindros. Es importante remarcar que este momento de sacudimiento que aparece con las configuraciones multicilíndricas es diferente al par de torsión de sacudimiento, en el apartado anterior explicado.

En la simulación de los seis cilindros en línea también se ha tenido en cuenta el momento que generan la fuerzas de inercia del eje Y.

8.2. Estudio de 6 cilindros opuestos

8.2.1. Descripción de los aspectos generales

Estos motores no dejan de ser como los motores en V, pero presentan dos bloques formando un ángulo de 180° para la V. Respecto la colocación de los pistones en el plano, estos están horizontalmente en lados opuestos del cigüeñal. De este modo se reduce la altura del motor y, consecuentemente, la del centro de gravedad del vehículo. Es una disposición más compacta, con elementos de menor longitud, mejorando la estabilidad. Con esta colocación se consigue la compensación de las fuerzas inerciales, por tanto, un buen balanceo del motor.

En el mercado aparecen tres tipos diferentes con esta configuración opuesta, con una tendencia a confundirlos entre sí:

- Motor Bóxer. A este modelo también se le conoce bajo el nombre de motor con cilindros horizontalmente opuestos. En este caso, los pistones en oposición no comparten la misma posición en el cigüeñal; los pistones opuestos se acercan y alejan al mismo tiempo del cigüeñal. Sus pistones en oposición llegan simultáneamente al mismo punto muerto, sea inferior o superior.
- Motor en V de 180° . En este modelo, los pistones que están confrontados, mientras uno se aleja el otro se acerca al cigüeñal. Esto se consigue situando las bielas de tal forma que compartan la misma muñequilla en el cigüeñal.
- Motor aeronáutico. Es empleado en el sector de la aviación donde estos motores de cilindros opuestos están desfasados con el objetivo de que el fallo de uno de los cilindros provoque el menor número de vibraciones posible. Con estos motores se mejora la refrigeración por aire.

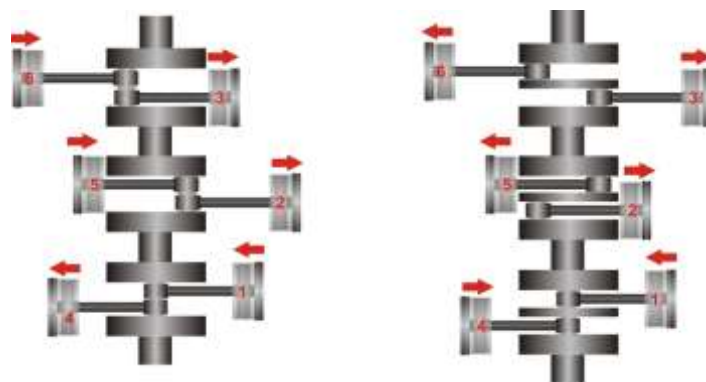


Fig. 24: Esquema sobre un motor de 6 cilindros con V a 180° y bóxer, respectivamente.
(https://en.wikipedia.org/wiki/Flat_engine#/media/File:Moteurs_%C3%A0_Plat_-_V_%C3%A0_180%C2%B0_vs._Boxer.png)

Por lo que respecta a las aplicaciones más habituales de estos modelos, la distribución Boxer se usa con menos de 6 cilindros y la de V a 180° con más de 8 cilindros, mejorando la efectividad del motor. Estas distribuciones son bastante comunes en motores para aviones, pero algunas marcas lo han introducido tanto en automóviles como en motocicletas.

El motor Boxer, a diferencia de los motores en V de 180°, cada biela tiene su propia manivela en el cigüeñal. Esta característica le permite tener una mayor regularidad de funcionamiento, repartiendo mejor los esfuerzos mecánicos. Estos motores son más anchos que largos, es decir, la longitud total de su cigüeñal es relativamente corta si se compara con los motores en línea.

Debido a sus dimensiones, el montaje que se realiza en los coches suele ser longitudinal, con el cigüeñal alineado al sentido de avance del vehículo. No se suele colocar de forma transversal, como en la mayoría de modelos que montan configuraciones en línea, por la anchura de la bancada.

8.2.2. Ventajas e inconvenientes de configuraciones de cilindros opuestos

Como aspectos positivos de los motores de cilindros opuestos se encuentran:

- Al tener los cilindros situados horizontalmente, el centro de gravedad está más bajo que en un motor en línea.
- Es un motor casi simétrico. Los cilindros opuestos no se sitúan exactamente en frente, ya que no comparten la misma manivela en el cigüeñal, sino que van contrapeados mínimamente. Es un factor importante a la hora de balancear las masas.
- Considerando el sector de la automoción, al estar en una posición más baja, permite que los frontales de los vehículos sean más aerodinámicos.
- La superficie de transferencia de calor con el exterior es mayor debido a la división en dos bancos. Al tener una mejor refrigeración, en algunos modelos iniciales eran refrigerados por aire.
- Equilibrado de las explosiones. Al disponer de los cilindros enfrentados se equilibran los tiempos de funcionamiento. Por ejemplo, cuando el pistón izquierdo está haciendo la carrera de explosión, el derecho está en la de admisión, siempre con los pistones a la misma distancia del centro de rotación del cigüeñal. Al tener el centro de masa invariable durante cada revolución se consiguen vibraciones muy pequeñas. Para establecer un ciclo completo, el orden de encendido no es el mismo que para motores en línea, y por ese motivo presentan una sonoridad característica.

- Al tener un cigüeñal muy corto presenta una buena resistencia mecánica. Como los esfuerzos mecánicos están bien repartidos se reducen las torsiones que sufre el cigüeñal, alargando su vida útil.

Por último, estas configuraciones presentan, como todas, algunas desventajas:

- Complejidad técnica. Al estar compuesto por dos bancos de cilindros, cada uno necesita su culata y su distribución, duplicando el árbol de levas y transmitiendo el movimiento distancias mayores por cadena o correa, modificando los colectores de admisión y escape, entre otras.
- Problemática derivada de la horizontalidad de los pistones:
 - El agujero del cilindro está situado muy cerca del aceite del cárter del motor, por lo que se puede dar el caso que en una curva o pendiente este aceite pase al cilindro, consumiéndolo.
 - La masa de los pistones tienen un peso determinado, y dicha fuerza hace rozar los pistones siempre con la superficie inferior de la camisa del cilindro. Este efecto es inversamente proporcional a la velocidad de giro del motor, debido a la inercia de la aceleración longitudinal del pistón.
 - Una vez el motor detenido, para que el aceite repose de nuevo en el cárter pasará un espacio de tiempo mayor, ya que el aceite no se encuentra arriba como en los motores en línea, sino en la línea horizontal. Durante el mantenimiento de estos motores, por este motivo suele funcionar con un exceso de aceite, agravando la primera situación indeseada.
- Para realizar el mantenimiento al motor, debido a su forma y colocación en el espacio disponible del vehículo, presenta un acceso difícil. Relativo al montaje, este también es más complicado en alguna de sus fases.
- Estas configuraciones multicilíndricas tienen un mayor costo de desarrollo y fabricación al contemplar un número más elevado de componentes.

Tabla 5: Resumen de las ventajas e inconvenientes de los motores bóxer

Ventajas	Inconvenientes
Centro de gravedad bajo	Complejidad técnica
Simetría	Mayor envergadura
Aerodinámica	Engrase
Mejor refrigeración	Mayor costo de fabricación
Equilibrado de las explosiones	Accesibilidad mecánica
Resistencia mecánica	

8.2.3. Desarrollo de la simulación

Para esta simulación se ha escogido una configuración de seis cilindros horizontalmente opuestos, la cual es conocida bajo el nombre de Boxer. En la industria del automóvil es el sistema más utilizado. En este modelo los pistones opuestos no se unen a una misma muñequilla, sino que cada uno tiene su propio brazo de unión con el cigüeñal. Por lo tanto, entre una y otra unión existe una distancia determinada. Cuando un pistón avanza, su opuesto, del banco de cilindros contrario situado a 180°, también lo hace, y viceversa.

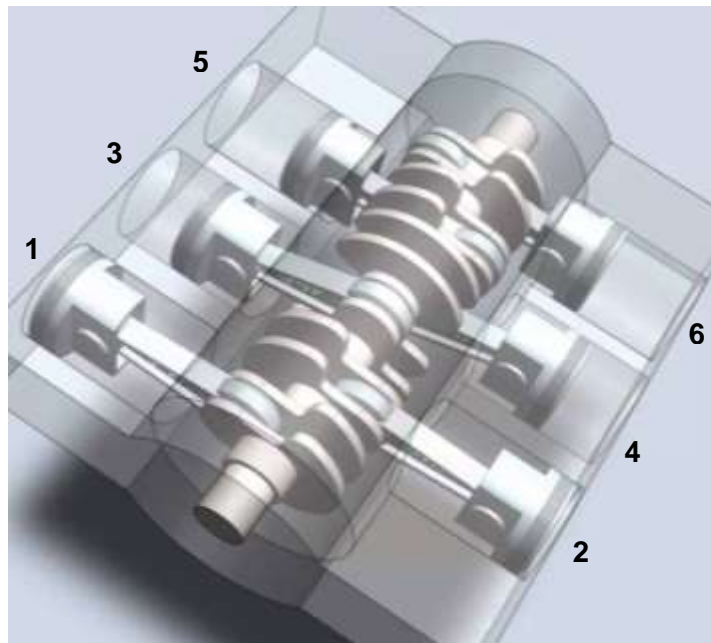


Fig. 25: Esquema de un motor Boxer de 6 cilindros.
 (<https://i.ytimg.com/vi/VhsfgLaf81o/maxresdefault.jpg>)

Tal y como se ha podido observar en la figura anterior, este montaje se numera empezando desde el punto más alejado del volante de inercia y se avanza hacia él. La numeración que se sigue es por orden de unión al cigüeñal.

De este modo, se obtienen todos los cilindros impares al lazo izquierdo y los pares al derecho, es decir, quedan numerados en forma de zig-zag. Respecto al ángulo de fase entre los cilindros, se vuelve a obtener el mismo que en el motor de seis en línea al disponer del mismo número de cilindros.

$$\Delta\phi = \frac{2 \text{ ciclos} * 360^\circ}{n_{\text{cilindros}}} = \frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$$

Previamente a la simulación, es necesario conocer cuál es el orden de encendido de esta configuración, para poder marcar el inicio donde actúa la fuerza del gas (período de explosión) de cada cilindro y en el orden correspondiente. Si no se tuviera esto en cuenta, los sumatorios de fuerzas y de momentos finales no serían correctos, al no representar realmente lo que sucede en cada instante del ciclo.

Al tener un ángulo de fase de 120° y los cilindros 1-2, 3-4 y 5-6 a 180° entre ellos, el diagrama de fase que marca las explosiones mantendrá una relación de dependencia muy fuerte entre estas parejas de cilindros. Esto se traduce, por ejemplo, al tomar el cilindro número uno como referencia, al ser el primero en explosionar, el cilindro número dos tendrá que estar en su carrera de compresión, para que se mantenga la correlación entre carreras. Esto marcará el momento de la explosión del cilindro número dos. Con las otras dos parejas sucede de forma análoga. Finalmente, el orden de encendido que cumple estas condiciones es:

$$1 - 4 - 5 - 2 - 3 - 6.$$

Tabla 6: Diagrama de fase del motor Boxer de 6 cilindros

	0°		180°		360°		540°		720°
1	Explosión								
2					Explosión				
3						Explosión			
4		Explosión							
5			Explosión						
6							Explosión		
	120°	120°							
	1 ciclo de 4 Tiempos								

Tal y como se observa, entre explosión y explosión el cigüeñal rotará 120° , que es el ángulo de fase correspondiente. En la hoja de simulación habrá que espaciar estas explosiones, de igual forma a como sucede en la realidad. Teniendo en cuenta el orden de encendido, se toma el cilindro número uno como referencia al ser el primero en explosionar. El siguiente en hacerlo será el número 4, el cual presentará un ángulo de desfase inicial de -120° . A medida que este ángulo avance con el giro del cigüeñal, llegará a la posición de 0° , donde tendrá lugar su explosión, ya que este se encontrará en el PMS. Se seleccionan los valores de la F_g y se situan en este ángulo nulo. Para el resto de cilindros se siguen los mismos pasos, pero variando los ángulos de desfase iniciales. Así se consigue representar fielmente a la realidad la sucesión de explosiones a lo largo del ciclo. Se realiza esta operativa de la misma forma que se llevó a cabo con la distribución en línea.

Para poder realizar una posterior comparación más cómoda entre las diferentes configuraciones que se simularán, es importante la selección del sistema de coordenadas con el que se trabaje. Este es totalmente de carácter arbitrario. Por tanto, el criterio de signos establecido para el motor de cilindros opuestos es el que aparece en el siguiente dibujo, donde siguiendo la regla de la mano derecha se ha establecido la dirección de los tres ejes de trabajo (X, Y, Z). Se ha determinado el eje de las X a favor del primer cilindro, por lo que el primer banco tendrá las fuerzas de inercia positivas y el segundo, por el contrario, negativas, al igual que las fuerzas en el eje de las Y.

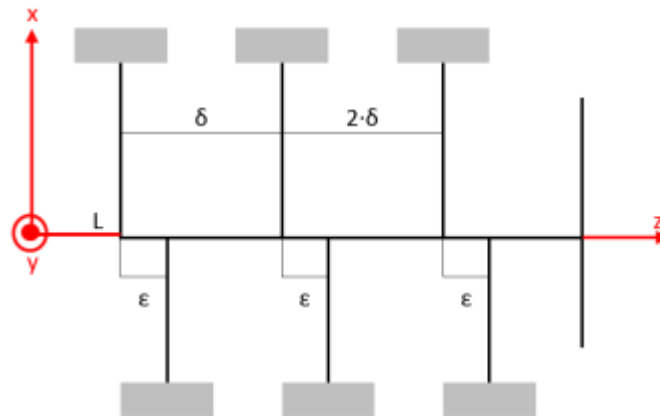


Fig. 26: Dibujo del motor representando las distancias del cigüeñal y los ejes de referencia.
 (Elaboración propia)

Para calcular los momentos que provocan las fuerzas de inercia sobre el cigüeñal, se establecen las distancias entre pistones. Los tres cilindros de la primera bancada (1-3-5) son como un motor en línea de tres cilindros, por lo que la distancia entre ellos será la misma que se estableció para el motor en línea. Sin embargo, los cilindros de la segunda bancada (2-4-6) presentan un desplazamiento en el cigüeñal con respecto a sus opuestos. Por eso la distancia del brazo de momento variará. Siguiendo la misma nomenclatura que anteriormente:

$$\delta = 0.09m$$

$$\varepsilon = 0.04m$$

$$z_1 = 0$$

$$z_2 = \varepsilon$$

$$z_3 = \delta$$

$$z_4 = \varepsilon + \delta$$

$$z_5 = 2 \cdot \delta$$

$$z_6 = \varepsilon + 2 \cdot \delta$$

Esta variación de la distancia entre ejes respecto los motores en línea, desencadenan en motores Boxer físicamente más pequeños, al tener una longitud del cigüeñal menor. También mencionar que al disminuir la envergadura del cigüeñal, los esfuerzos mecánicos que este sufre són significativamente menores, aumentando así su vida útil y pudiendo incluso a reducir peso y diámetro.

El desarrollo de la simulación del motor Boxer de 6 cilindros se hace de forma análoga al motor en línea, teniendo en cuenta las consideraciones arriba mencionadas. Las simulaciones, también para diferentes velocidades de giro del motor, aparecen en los archivos anexos a la memoria.

8.3. Estudio de 6 cilindros en V

8.3.1. Introducción a los aspectos generales

Así como los motores en línea, para esta configuración también se encuentran versiones con dos, cuatro, seis, ocho, diez y doce cilindros, en función de la aplicación. Estos motores se pueden llegar a pensar como dos motores en línea montados en un único cigüeñal. A cada una de las dos partes se le denomina banco. La principal característica que presenta es el valor que toma el ángulo de la V que hay entre ellos. La dinámica irá condicionada al número de cilindros del motor en V así como de los ángulos de fase entre cada cilindro y el cigüeñal.

A partir de los principios de estudio expuestos para motores en línea, también se desarrollan para el diseño de configuraciones en V. Para lograr un balance de inercia es importante un orden de encendido uniforme, y para el balance de los momentos, una simetría de espejo sobre el cigüeñal. Se puede decir que la configuración de V6 a estudiar no deja de ser dos motores de tres cilindros en línea con un cigüeñal común. Contra mayor sea el número de cilindros, más pulsos de potencia por ciclo se obtendrán, proporcionando así una evolución más suave del par motriz.

La peculiaridad remite en la existencia de un ángulo en V entre ambos bancos en línea. Dicho ángulo es un parámetro de diseño, pero el buen o mal funcionamiento del sistema estará condicionado a este. La apertura de la V presenta un rango bastante amplio, desde los 54° hasta los 120° , aproximadamente, dependiendo del número de cilindros. Con un ángulo óptimo para un conjunto de cilindros determinado se podrá conseguir homogeneizar el par y cancelar fuerzas de sacudimiento.

Respecto a las aplicaciones, motores de 6 cilindros en adelante para el sector del automóvil, maquinaria pesada, competición... y los 2 cilindros para motocicletas, llegando incluso a algunos modelos de 4. Su incorporación en el mercado se debe a la necesidad de ahorrar espacio y a la tendencia en auge de la tracción delantera, montando motores transversalmente, con una mejor distribución de peso.

Como especificación técnica, al tener esta forma en V la aspiración del aire se realiza por la parte interior de la V, mientras que los gases son expulsados por los laterales. La ventaja principal de estas configuraciones es clara; obtener un bloque motor más compacto, con un cigüeñal más corto. Estos motores son capaces de suministrar altas potencias, asegurando buenas prestaciones mecánicas. Respecto a los motores de 6 cilindros en línea, los costes de fabricación son menores. Sus desventajas son la necesidad de duplicar los elementos de la distribución (árboles, válvulas...) al tener dos bancadas independientes. Esto conlleva un accionamiento más complejo de la distribución.

8.3.2. Ecuaciones que definen las fuerzas y los momentos

En este apartado se desarrollarán los cálculos a seguir para poder encontrar las fuerzas y los momentos de sacudimiento, así como los pares de torsión de inercia y de gas, respectivamente.

Se denomina al ángulo de la V como $\nu = 2 \cdot \gamma$, representado en la Fig. 27. Por lo tanto, cada banco de cilindros está descentrado con un ángulo de banco γ a partir del eje X, respecto del cual se mide el ángulo de la manivela ωt . Para el desarrollo de las ecuaciones se tomará un motor de 4 cilindros en V, un modelo más sencillo para ver lo que sucede en cada momento. Como punto de referencia se establece el cilindro 1 del banco derecho (R). Se producirá una superposición de ángulos entre el ángulo del banco y el de fase del cigüeñal.

$$\theta = (\omega t - \phi_i)$$

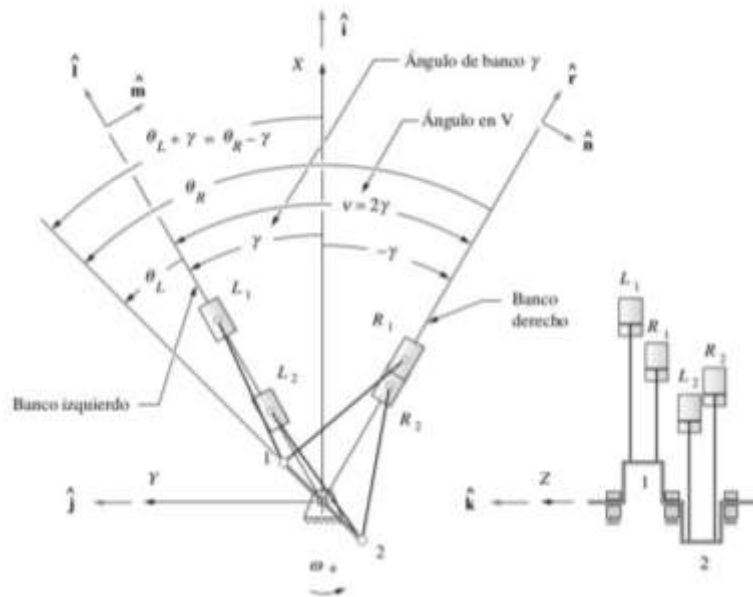


Fig. 27: Esquema de la geometría de un motor en V. (Norton, Robert L. (2005) Diseño de Maquinaria)

Tal y como aparece en la figura anterior, cada pareja de cilindros comparten el mismo codo del cigüeñal, característica principal de las configuraciones en V. La fuerza de sacudimiento en la dirección del movimiento de un único pistón será:

$$F_s \cong m_B r \omega^2 \left(\cos \theta + \frac{r}{l} \cos 2\theta \right) \hat{u}$$

Realizando la suma vectorial de la contribución de fuerzas provenientes de cada banco se tiene que:

$$F_s = F_{sL} + F_{sR}$$

Si se considera ahora el ángulo de la manivela respecto el eje X:

$$F_{sL} = m_B r \omega^2 \left[\cos(\theta + \gamma) + \frac{r}{l} \cos 2(\theta + \gamma) \right] \hat{l}$$

$$F_{s_R} = m_B r \omega^2 \left[\cos(\theta - \gamma) + \frac{r}{l} \cos 2(\theta - \gamma) \right] \hat{r}$$

Si se substituyen las mismas identidades trigonométricas que se utilizaron para encontrar las expresiones sobre el motor en línea:

$$\cos(\theta + \gamma) = \cos \theta \cos \gamma - \sin \theta \sin \gamma$$

$$\cos(\theta - \gamma) = \cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma$$

$$F_{s_L} = m_B r \omega^2 \left[\cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma + \frac{r}{l} (\cos 2\theta \cos 2\gamma + \sin 2\theta \sin 2\gamma) \right] \hat{l}$$

$$F_{s_R} = m_B r \omega^2 \left[\cos \theta \cos \gamma - \sin \theta \sin \gamma + \frac{r}{l} (\cos 2\theta \cos 2\gamma - \sin 2\theta \sin 2\gamma) \right] \hat{r}$$

Para considerar configuraciones con cilindros múltiples con su ángulo de fase característico, se reescriben las expresiones anteriores como:

$$\cos(\omega t - \phi_i) = \cos \omega t \cos \phi_i + \sin \omega t \sin \phi_i$$

$$\sin(\omega t - \phi_i) = \sin \omega t \cos \phi_i - \cos \omega t \sin \phi_i$$

$$F_{s_R} = m_B r \omega^2 \left[\begin{aligned} &(\cos \omega t \cos \gamma - \sin \omega t \sin \gamma) \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \cos \phi_i \\ &+ (\cos \omega t \sin \gamma + \sin \omega t \cos \gamma) \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \sin \phi_i \\ &+ \frac{r}{l} (\cos 2\omega t \cos 2\gamma - \sin 2\omega t \sin 2\gamma) \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \cos 2\phi_i \\ &+ \frac{r}{l} (\cos 2\omega t \sin 2\gamma + \sin 2\omega t \cos 2\gamma) \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \sin 2\phi_i \end{aligned} \right] \hat{r}$$

$$F_{s_L} = m_B r \omega^2 \left[\begin{aligned} &(\cos \omega t \cos \gamma + \sin \omega t \sin \gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \cos \phi_i \\ &- (\cos \omega t \sin \gamma - \sin \omega t \cos \gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \sin \phi_i \\ &+ \frac{r}{l} (\cos 2\omega t \cos 2\gamma + \sin 2\omega t \sin 2\gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \cos 2\phi_i \\ &- \frac{r}{l} (\cos 2\omega t \sin 2\gamma - \sin 2\omega t \cos 2\gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \sin 2\phi_i \end{aligned} \right] \hat{l}$$

La suma de estas dos últimas ecuaciones deriva en una fuerza de sacudimiento nula en cada banco. Volviendo a los ejes de trabajo \hat{i} y \hat{j} , se resuelven las fuerzas de sacudimiento para cada banco:

$$F_{sx} = (F_{s_L} + F_{s_R}) \cdot \cos \gamma \hat{i}$$

$$F_{sy} = (F_{s_L} + F_{s_R}) \cdot \sin \gamma \hat{j}$$

$$F_s = F_{sx} \hat{i} + F_{sy} \hat{j}$$

Una primera consideración sería que para un ángulo de la V de $\gamma = 90^\circ$, la componente en el eje X de las fuerzas de sacudimiento se anularía. Por otro lado, en el caso que $F_{s_L} = F_{s_R}$, la componente en el eje Y de las fuerzas de sacudimiento sería cero para cualquier valor de γ .

Por este motivo, en configuraciones en V o opuestas se puede llegar a cancelar estas fuerzas de sacudimiento, pese a no sumar cero.

Pasando a los momentos de sacudimiento provocados por las fuerzas anteriores, se multiplica cada uno de los términos por el brazo de momento correspondiente a cada cilindro. Es obvio que estos momentos serán ortogonales a los planos de los cilindros. En la Fig. 27 se representa en el plano Z correspondiente al cigüeñal, los vectores \hat{n} y \hat{m} , perpendiculares a \hat{r} y \hat{l} , respectivamente.

$$\begin{aligned}
 M_{s_R} = m_B r \omega^2 & \left[\begin{aligned} & (\cos \omega t \cos \gamma - \sin \omega t \sin \gamma) \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} z_i \cdot \cos \phi_i \\ & + (\cos \omega t \sin \gamma + \sin \omega t \cos \gamma) \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} z_i \cdot \sin \phi_i \\ & + \frac{r}{l} (\cos 2\omega t \cos 2\gamma - \sin 2\omega t \sin 2\gamma) \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} z_i \cdot \cos 2\phi_i \\ & + \frac{r}{l} (\cos 2\omega t \sin 2\gamma + \sin 2\omega t \cos 2\gamma) \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} z_i \cdot \sin 2\phi_i \end{aligned} \right] \hat{n} \\
 M_{s_L} = m_B r \omega^2 & \left[\begin{aligned} & (\cos \omega t \cos \gamma + \sin \omega t \sin \gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n z_i \cdot \cos \phi_i \\ & - (\cos \omega t \sin \gamma - \sin \omega t \cos \gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n z_i \cdot \sin \phi_i \\ & + \frac{r}{l} (\cos 2\omega t \cos 2\gamma + \sin 2\omega t \sin 2\gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n z_i \cdot \cos 2\phi_i \\ & - \frac{r}{l} (\cos 2\omega t \sin 2\gamma - \sin 2\omega t \cos 2\gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n z_i \cdot \sin 2\phi_i \end{aligned} \right] \hat{m}
 \end{aligned}$$

Para lograr un momento de sacudimiento cero al sumar las dos expresiones anteriores, para los términos hasta la segunda armónica de cada banco, se extraen criterios semejantes a los de las tablas que aparecen en el apartado 8.1. *Estudio de 6 cilindros en línea*. Si se resuelven los momentos para cada banco se tiene:

$$M_{sx} = (M_{sL} - M_{sR}) \cdot \sin \gamma \hat{i}$$

$$M_{sy} = (-M_{sL} - M_{sR}) \cdot \cos \gamma \hat{j}$$

$$M_s = M_{sx} \hat{i} + M_{sy} \hat{j}$$

Visualizando las expresiones de fuerza y momento de sacudimiento finales, se puede decir que existen motores con una V determinada donde se cancelan sus componentes, aún incluso cuando las sumas no sean nulas.

Finalmente, se encontrarán los pares de torsión de inercia en cada uno de los bancos:

$$T_{i21R} \cong \frac{1}{2} m_B r^2 \omega^2 \left[\begin{array}{c} \frac{r}{2l} \left(\sin(\omega t + \gamma) \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \cos \phi_i - \cos(\omega t + \gamma) \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \sin \phi_i \right) \\ - \left(\sin 2(\omega t + \gamma) \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \cos 2\phi_i - \cos 2(\omega t + \gamma) \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \sin 2\phi_i \right) \\ - \frac{3r}{2l} \left(\sin 3(\omega t + \gamma) \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \cos 3\phi_i - \cos 3(\omega t + \gamma) \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \sin 3\phi_i \right) \end{array} \right] \hat{k}$$

$$T_{i21L} \cong \frac{1}{2} m_B r^2 \omega^2 \left[\begin{array}{c} \frac{r}{2l} \left(\sin(\omega t - \gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \cos \phi_i - \cos(\omega t - \gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \sin \phi_i \right) \\ - \left(\sin 2(\omega t - \gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \cos 2\phi_i - \cos 2(\omega t - \gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \sin 2\phi_i \right) \\ - \frac{3r}{2l} \left(\sin 3(\omega t - \gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \cos 3\phi_i - \cos 3(\omega t - \gamma) \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^n \sin 3\phi_i \right) \end{array} \right] \hat{k}$$

Al sumar todas las contribuciones de cada banco al par total, este será cero hasta su tercera armónica cuando los sumatorios de los senos y cosenos de los ángulos de fase y sus múltiplos sumen cero, siendo condición suficiente pero no necesaria. Por último, y no menos importante, el par de torsión de gas. Si se considera que tanto el banco izquierdo como el derecho tienen el mismo ángulo γ_k , pero cambiado de signo, positivo y negativo respectivamente, se obtiene:

$$T_{g21} \cong F_g r \sum_{i=1}^n \left(\sin[\omega t - (\phi_i + \gamma_k)] \cdot \left\{ 1 + \frac{r}{l} \cos[\omega t - (\phi_i + \gamma_k)] \right\} \right)$$

8.3.3. Consideraciones para la simulación

Para desarrollar la simulación de la configuración en V hay que tener en cuenta diversos aspectos. El primero es, como ya se mencionó anteriormente, que por cada codo del cigüeñal se acoplarán dos bielas. Esto se traduce en que los cilindros opuestos de cada bancada se unen a una muñequilla común, por lo que cuando un pistón se encuentra en una carrera de ascensión, su opuesto está en descenso, y viceversa.

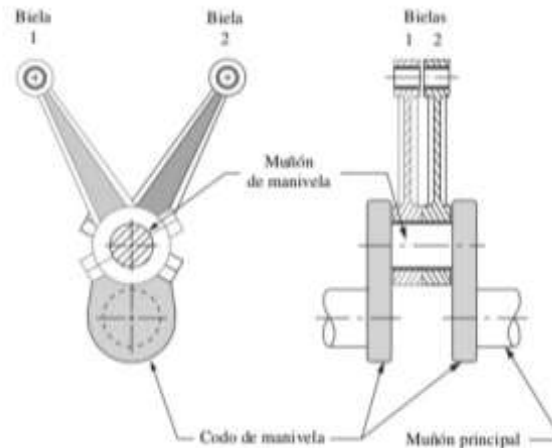


Fig. 28: Representación de dos bielas en un mismo codo del cigüeñal. (Norton, Robert L. (2005) Diseño de Maquinaria)

Habrà un total de 3 codos, desfasados 120° cada uno, anàlogamente al càlculo del àngulo de fase para 6 cilindros encontrado en las configuraciones anteriores. Con esto se consigue el espaciamento màs òptimo posible de los pulsos de potencia. Su cigüeñal se encuentra apoyado en cuatro puntos, intercalados entre sus respectivas tres muñequillas o puntos de empuje. Otro aspecto es la numeración de los cilindros. Se adoptará el mismo criterio que para los motores Boxer; comenzando desde el cilindro màs alejado del volante de inercia y numerando los que vienen a continuaci3n. De este modo, en la bancada izquierda quedan los cilindros impares, mientras que en la derecha los pares, tal y como se observa en esta figura:

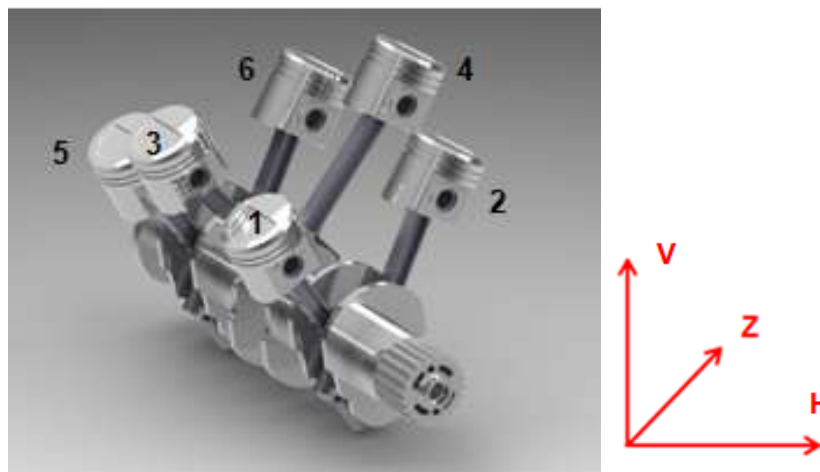


Fig. 29: Cigüeñal de un motor de seis cilindros en V. (<https://grabcad.com/library/v6-engine--3>)

Aquí también aparecen los ejes de referencia escogidos (H,V,Z) para esta distribución. Como aclaración, el eje Z se sitúa a lo largo del cigüeñal. Para realizar la simulación de este modelo en las tablas de Excel, se coloca el motor en la misma posición que en la figura. De tal manera que el banco izquierdo está inclinado hacia la izquierda a con un ángulo de $\gamma = \nu/2$, y el derecho lo hace de la misma forma pero con un ángulo de $\gamma = -\nu/2$. Por este motivo, las componentes de las fuerzas de inercia de cada cilindro, denominadas en la dirección X para el sentido de avance/retroceso del pistón, y la dirección Y, perpendicular a esta, se deberán descomponer en las dos nuevas direcciones: eje horizontal y eje vertical. Más adelante se detallará esta descomposición. El sentido de giro del cigüeñal se toma antihorario.

Se seguirá con la tendencia de un encendido uniforme, un patrón de encendido entre los cilindros del motor uniformemente espaciado en el tiempo, para evitar la aparición de vibraciones molestas y perjudiciales para el conjunto. Entonces, considerando también el posicionamiento y los desplazamientos de los pistones, el orden de encendido dependerá del ángulo de la V que se tome. El ángulo de fase entre cilindros que se encuentren en distintas muñequillas seguirá siendo de 120° , sin embargo el existente entre los cilindros de un mismo codo no. Ese ángulo será el mismo que el de la V (ν), es decir, el ángulo entre los dos bancos del motor.

Por tanto, para cada ángulo de la V testado, a cada cilindro le corresponderá un valor determinado del ángulo para realizar la explosión, detallado a continuación. Tomando estos ángulos entre explosiones se reparten los pulsos de potencia al largo del ciclo completo. Para garantizar la máxima uniformidad de la incidencia de las explosiones a ambos lados, se establecerá un orden de encendido tal que:

2	1	6	5	4	3
$-\nu$	0°	$240^\circ - \nu$	240°	$480^\circ - \nu$	480°

teniendo en cuenta la numeración antes expuesta. Pueden existir otros órdenes de encendido, pero con este se evita la explosión desigual de la mayor parte de cilindros de una bancada y a continuación la otra, evitando irregularidades y proporcionando un posible mejor balance, tal y como se comprobará en apartados posteriores.

A continuación, se presentan las tablas que representan la distribución de explosiones a lo largo del ciclo, en función de los tres ángulos de la V simulados. La primera explosión, que tiene lugar en el cilindro número dos, se produce ν grados antes del ángulo cero tomado como referencia para todas las simulaciones.

Tabla 7: Diagrama de fase de un motor de 6 cilindros en V a 60°

	0°	180°	360°	540°	720°
1	Explosión				
2	Explosión				
3				Explosión	
4				Explosión	
5		Explosión			
6		Explosión			
	60°				
	1 ciclo de 4 Tiempos				

Tabla 8: Diagrama de fase de un motor de 6 cilindros en V a 90°

	0°	180°	360°	540°	720°
1	Explosión				
2	Explosión				
3				Explosión	
4				Explosión	
5		Explosión			
6		Explosión			
	90°				
	1 ciclo de 4 Tiempos				

Tabla 9: Diagrama de fase de un motor de 6 cilindros en V a 120°

	0°	180°	360°	540°	720°
1	Explosión				
2	Explosión				
3				Explosión	
4				Explosión	
5		Explosión			
6		Explosión			
	120°				
	1 ciclo de 4 Tiempos				

Para una V con un ángulo de 120°, coincidiendo este ángulo con el de fase, y teniendo en cuenta la misma numeración de cilindros, otro orden de encendido posible sería el 1 – 5 – 3 – 4 – 2 – 6. No obstante, este orden hace explotar todos los cilindros de una bancada y a continuación, los tres de la bancada opuesta. Por este motivo, se ha preferido la primera opción, pensando que proporciona una distribución irregular de la potencia, dificultando la cancelación de las fuerzas y los pares.

Esta distribución de explosiones, en la simulación corresponde al momento de actuación de la fuerza del gas en cada cilindro. Por ello, a partir de los ángulos antes expuestos, a medida que el cigüeñal avanza y el pistón en cuestión llega al su PMS, en el momento donde este ángulo es 0° , la fuerza del gas comenzará a actuar alrededor de este punto, llegando así a su pico de fuerza en instantes posteriores.

Correspondiente a las expresiones utilizadas, estas son las mismas que en las simulaciones anteriores. Se ha introducido los ángulos para cada cilindro en base al nuevo orden de encendido, y distinto para cada ángulo de la V tal y como queda representado en los diagramas. Las fuerzas de inercia de cada cilindro se deberán descomponer en los nuevos ejes de referencia (H,V). Dicha descomposición varía en función de la bancada a la que pertenezca el cilindro en cuestión. En contraposición, los momentos debidos a la fuerza del gas y los de sacudida no es necesario descomponerlos, ya que actúan en el mismo plano y se suman indistintamente. Para cada uno de los armónicos existentes se tendrá que:

$$\begin{aligned}
 F_H &= \left(-\sum F_{XL} + \sum F_{XR} \right) \cdot \sin \gamma - \left(\sum F_{YL} + \sum F_{YR} \right) \cdot \cos \gamma \\
 F_V &= \left(\sum F_{XL} + \sum F_{XR} \right) \cdot \cos \gamma + \left(-\sum F_{YL} + \sum F_{YR} \right) \cdot \sin \gamma
 \end{aligned}$$

siendo los sumatorios de las fuerzas de inercia en la dirección X o Y, de los cilindros de la bancada izquierda (L) o derecha (R). Las expresiones del apartado 8.3.2. *Ecuaciones que definen las fuerzas y los momentos* permiten encontrar hasta el segundo y tercer armónico de los términos, pero para la simulación se trabaja hasta el quinto armónico, en caso que exista, proporcionando más precisión, tal y como se realizó para las configuraciones en línea y Boxer.

Para encontrar los resultados totales de cada término, se realizan las sumas de cada uno de los cilindros. Sin embargo, aparece la misma dificultad que la distribución Boxer. Para calcular los momentos que provocan las fuerzas de inercia sobre el eje del cigüeñal se parte de la Fig. 26. Considerando que ahora se trata de un motor en V, esta sería la posible imagen en planta, pero la explicación puede tomar como base esa figura. En el motor en V, la unión de la manivela con el cigüeñal se encuentra en la misma muñequilla. La distancia en el eje Z entre cilindros de la misma bancada se mantiene constante $\delta = 0,09 \text{ m}$, mientras que la que existe entre cilindros opuestos disminuye, tomando un valor de $\varepsilon = 0,02 \text{ m}$. Este valor es el espesor de una biela, aproximadamente. Es por esto que el banco derecho con los cilindros 2,4 y 6 está desplazado a lo largo del eje del cigüeñal en una distancia igual al espesor de una biela (ε).

Por último, se han descompuesto los momentos respecto el cigüeñal en ambos planos de trabajo, para cada uno de los armónicos existentes:

$$\begin{aligned}
 M_H &= (M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6) \cdot \cos \gamma \\
 M_V &= [(M_1 + M_3 + M_5) - (M_2 + M_4 + M_6)] \cdot \sin \gamma
 \end{aligned}$$

dónde M_n es el momento que genera la fuerza de inercia respecto el cigüeñal para el cilindro n . Como se observa en la segunda expresión, los momentos verticales de la bancada derecha se oponen al giro, de ahí su signo negativo. Al multiplicarlos por el seno o coseno del ángulo de la bancada con respecto a la vertical, resultan los momentos en los planos adecuados.

9. Análisis de los resultados obtenidos

9.1. Evaluación del motor de 6 cilindros en línea

Para esta primera distribución con los cilindros dispuestos linealmente, uno al lado del otro, se ha obtenido la simulación correspondiente. En ella se ha calculado en la última hoja llamada *Resultados*, tal y como se explicó en el apartado 8.1. *Estudio de 6 cilindros en línea*, las fuerzas de inercia totales en ambos ejes, los momentos del gas totales y los pares de torsión de inercia totales. Además se ha tenido en cuenta el momento que provocan cada uno de los armónicos de fuerzas inerciales, de ambos ejes, sobre el cigüeñal.

Respecto los valores que se han obtenido, comentar que tanto las fuerzas de inercia como los momentos debidos a fuerzas inerciales han resultado nulos en todos sus armónicos. Estos efectos han sido cancelados debido al resto de cilindros. Esta es una de las claras ventajas de esta configuración multicilíndrica. Al realizar una distribución uniforme del orden de encendido se asegura la cancelación de los efectos entre ellos. Por lo tanto, se ha comprobado cómo las fuerzas de inercia se cancelan hasta el cuarto armónico en el eje X y el primero del Y, y los momentos sobre el cigüeñal debido a las F_i también.

En contraposición, se encuentran los momentos de sacudida o pares de torsión de inercia, donde el tercer armónico, función del ángulo triple de la manivela ($3 \cdot \theta$), no es nulo. El resto de armónicos (primero, segundo, cuarto y quinto) presentan un valor cero o claramente despreciable, del orden de 10^{-15} . Este fenómeno se debe a que los armónicos de tercer orden, se encuentran en fase, lo que se traduce en la suma de los efectos de cada cilindro. Los resultados son análogos para los tres valores de la velocidad angular testados.

En el siguiente Gráfico 10, se puede comprobar la evolución del tercer armónico para un ciclo completo, representado para cada uno de los regímenes de revoluciones con los que se trabaja, ya que en este caso el momento de sacudida si depende de la velocidad angular. En la gráfica se puede ver como a medida que el régimen aumenta, también lo hace el valor del momento de sacudimiento, es decir, son directamente proporcionales.

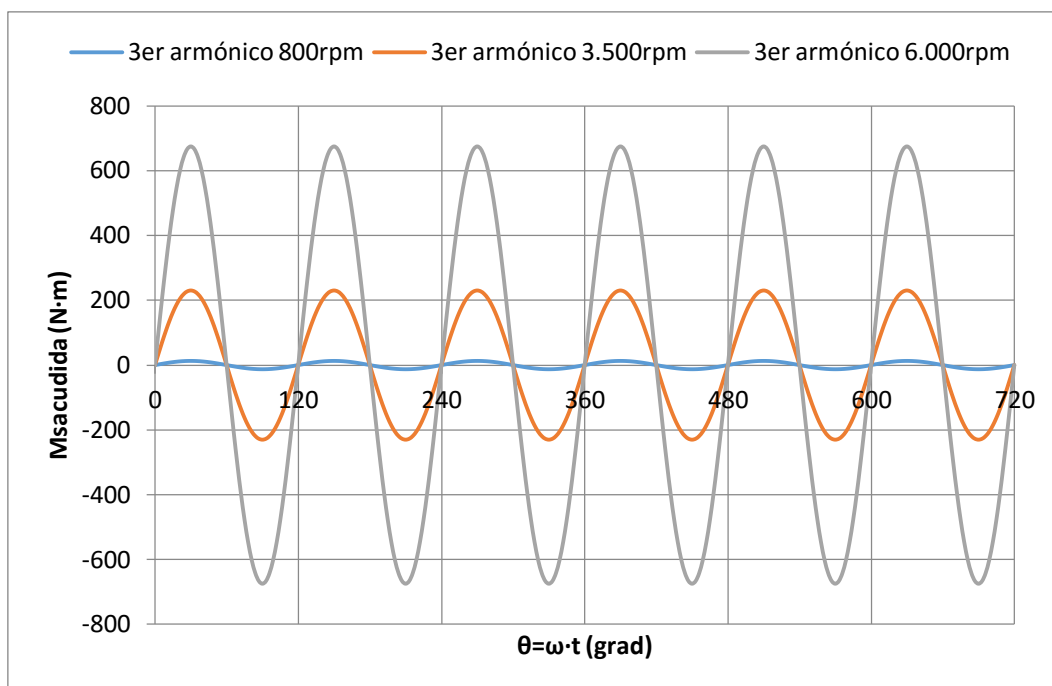


Gráfico 10: Representación del tercer armónico del momento de sacudimiento total para un motor de 6 cilindros en línea

Por otro lado, se encuentran los momentos generados por la fuerza del gas en cada uno de los cilindros durante el ciclo. Estos momentos denominados del gas son los encargados de impulsar el vehículo. Este momento se transmite a través del cigüeñal hacia la transmisión. Cada uno de sus tres armónicos, primero, segundo y cuarto, presentan una evolución sinodal de sus valores a lo largo de una revolución de la manivela. A continuación se adjunta su representación:

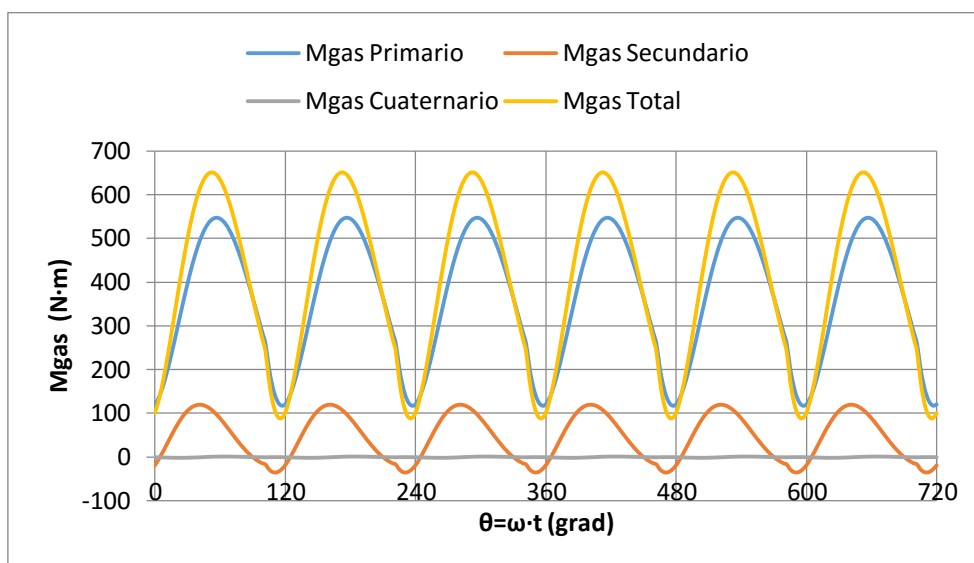


Gráfico 11: Representación de los momentos del gas para un motor de 6 cilindros en línea

Al observar la gráfica, se ve el efecto de cada uno de los armónicos; el primer armónico es el más relevante, seguido del segundo. Respecto al cuarto, este se podría llegar a despreciar en comparación a la magnitud del resto de armónicos. También se ha representado el momento del gas total, en el que se comprueba la clara predominancia del primer armónico. Al ser independiente de la velocidad angular, para los tres regímenes de vueltas, se obtendrán las mismas curvas. Lo que sí que variará al aumentar la velocidad será la potencia suministrada por el motor, ya que son directamente proporcionales, a mayor régimen de vueltas mayor será esta.

Este par de salida total presenta una evolución sinodal distribuida a lo largo de los 720° que dura un ciclo. Esta curva presenta los seis picos de momento, generados por la explosión de la mezcla en cada uno de los cilindros en el instante correspondiente. Se comprueba pues que se producen cada 120° , el ángulo de fase entre los pistones. Para uniformizar este par motor será necesario el montaje de un volante de inercia al final de uno de los extremos del cigüeñal, con el fin de almacenar esta energía en forma de energía cinética y poder suministrarla al conjunto de la transmisión para hacer avanzar el vehículo.

En caso que se desee, se puede comprobar este momento del gas con el calculado en el apartado 3. *Cálculo alternativo del momento del gas* en el *Documento 2 Anexos*, donde se calcula por otro camino el momento motor total suministrado. Se constata que ambas gráficas son iguales.

Se puede concluir por tanto, que con un motor de 6 cilindros en línea se consigue un excelente equilibrado; las fuerzas quedan balanceadas, así como la mayoría de los momentos que se generan. Esta distribución, no deja de ser una superposición de dos motores de tres cilindros y por simetría se logra un equilibrado de los primeros, segundos y cuartos armónicos de las fuerzas de inercia. Respecto a los pares de sacudimiento, también equilibrados por la simetría, los armónicos de tercer orden se encuentran en fase por lo que se suman. Estos producirán esfuerzos sobre el cigüeñal y el cárter, que irán en aumento cuando el motor trabaje a altas velocidades.

Con el orden de encendido que se ha establecido, se consigue repartir uniformemente los esfuerzos que recibe el cigüeñal, reduciendo la magnitud de los esfuerzos torsionales que debe soportar. Con esto se consigue una posible reducción de la inercia necesaria, y como consecuencia directa, una reducción del peso del bloque motor, hecho de gran relevancia en el mundo de la automoción.

Por el contrario, también presenta aspectos negativos. Al disponer sus cilindros uno al lado del otro, se tiene un motor excesivamente largo, lo que dificulta su emplazamiento en el vehículo. Por este motivo, aparecieron las distribuciones en V a partir de 5 cilindros, que reducen este espacio considerablemente. Otro inconveniente reside en un largo cigüeñal, el cual tiene que descansar sobre más puntos de apoyo y soportar más esfuerzos.

Los armónicos de orden superior a los calculados en este estudio, se pueden despreciar en caso que existan, ya que su magnitud es muy pequeña y no sería un origen de vibraciones relevante.

9.2. Evaluación del motor de 6 cilindros Boxer

Una vez realizadas las tres simulaciones para esta disposición de cilindros, con los bloques de motor horizontalmente dispuestos, se procede al análisis de los resultados obtenidos. Las hojas de cálculo son las mismas que para el motor en línea, pero se han realizado las modificaciones pertinentes para adaptarla a esta configuración. Al presentar un orden de encendido distinto, los ángulos de cada cilindro han variado respecto al modelo anterior. Sin embargo, la suma total de cada término estudiado en la hoja final se ve invariable. Esto se debe a que la suma se ha visto alterada en orden, pero no en el valor de los términos.

Si se observan las columnas de los armónicos de las fuerzas de inercia, para todas las velocidades angulares, estas son nulas o prácticamente cero, del mismo orden de 10^{-15} , aproximadamente. El motivo vuelve a ser la simetría de la distribución, pero en este caso los efectos de los cilindros de un bloque se cancelan con los generados por el bloque opuesto, obteniendo un buen equilibrado del sistema.

Volviendo a los momentos provocados por la expansión del gas, al igual que en el motor de 6 en línea, el valor de sus armónicos evoluciona en función del momento de las explosiones. La evolución del valor de cada armónico y la del momento del gas total quedan representados en el *Gráfico 11*. Por lo tanto, se comprueba cómo estos momentos son iguales que los que aparecen en el motor en línea, para todos los regímenes de vueltas testados. Esto se debe a que la magnitud de la fuerza del gas es la misma, afectando por igual al cálculo del momento de salida del cigüeñal y a que el cómputo global de las explosiones proporciona la misma curva. Los picos de este *Mgas Total*, por el contrario no corresponden a las explosiones de los mismos cilindros, ya que el orden de ignición cambia respecto el motor en línea, pero dan la misma forma y amplitud. Esta curva idealmente es correcta, asciende hasta el punto de par máximo y luego desciende hasta que se produce una nueva explosión en el siguiente cilindro que corresponda según el orden de encendido establecido. Lo único a tener en cuenta es que el par de salida mantiene la misma forma para cada rango de vueltas del motor, pero al aumentar las revoluciones, la potencia que dota al motor es superior cuanto mayor sea la velocidad de giro, explicación análoga a la realizada con el motor en línea. En este caso, también se puede ir a los anexos y realizar la misma comprobación que antes, ya que la curva del par de salida suministrado es la misma para el Boxer que el motor en línea.

Como punto positivo, los momentos debidos a las fuerzas inerciales sobre el cigüeñal son nulos también, para cada uno de sus armónicos, tanto en el eje X como en el Y. Como punto negativo, el tercer armónico de los momentos de sacudimiento no es nulo. Sus términos vuelven a estar en fase, provocando la suma de sus efectos que desencadena en una amplificación del impacto final sobre el conjunto, generando vibraciones. Este efecto varía en función de la velocidad angular, compartiendo curva y valores con el *Gráfico 10*. El resto de armónicos, tanto de primer orden hasta el de quinto, quedan cancelados. En el caso que se tuviera un motor en V a 180° , el efecto de este tercer armónico se llegaría a cancelar. Pero esta sería otra configuración distinta, la cual presenta también otras desventajas como el espacio que ocupa.

Se concluye su análisis diciendo que la distribución de 6 cilindros Boxer presenta el mismo equilibrado que un motor en línea, del mismo número de cilindros.

9.3. Evaluación del motor de 6 cilindros en V

Una vez llegado este apartado, es necesario diferenciar, dentro de esta misma distribución en V, tres simulaciones para tres ángulos distintos de la V. Siguiendo un orden ascendente del ángulo:

9.3.1. Ángulo de la V a 60°

Para esta simulación, una vez introducidas las modificaciones de las expresiones para encontrar las fuerzas y los momentos, insertando la nueva variable en juego que es este propio ángulo de la V y descomponiendo en los nuevos ejes cada efecto, se obtiene su comportamiento. En la hoja de *Resultados* se aprecia que para un ángulo de 60° entre ambas bancadas, todas las fuerzas de inercia quedan canceladas, tanto en el eje horizontal como en el vertical.

A continuación, se encuentran los momentos del gas, desglosado en momento del gas de primer, segundo y cuarto orden, respectivamente. Cada uno de sus armónicos presenta una evolución sinodal a lo largo de un ciclo. Es importante aclarar que para esta distribución en V a 60° las curvas de los pares del gas serán las mismas para cada régimen de vueltas, ya sea el de 800 rpm hasta el de 6.000 rpm. Esto se debe a que los valores de la curva de la fuerza del gas son idénticos, lo único que si que variará será la potencia suministrada a cada rango de revoluciones. Los momentos del gas para esta configuración concreta quedan aquí expuestos:

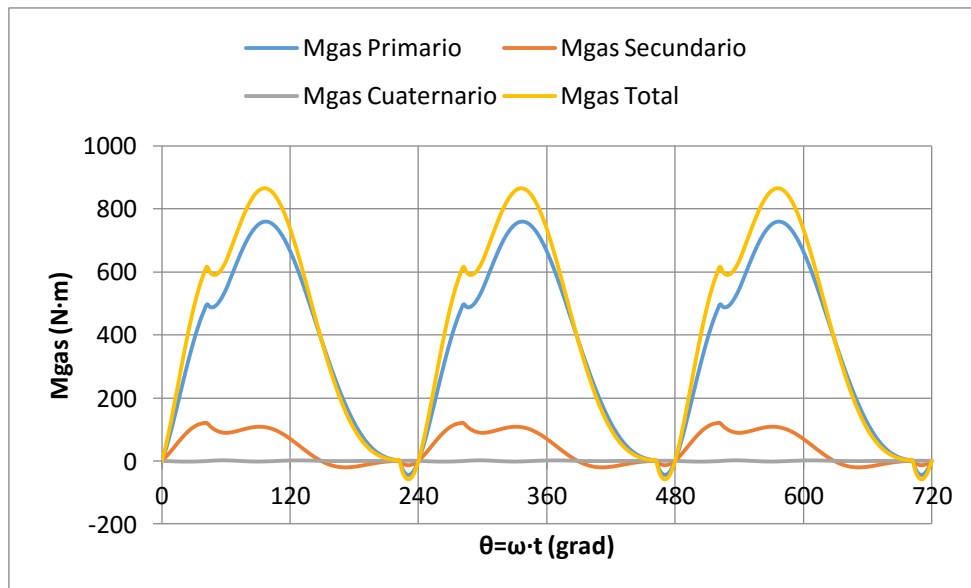


Gráfico 12: Representación de los momentos del gas para una V a 60°

Como el ángulo entre cilindros opuestos es relativamente pequeño, los picos de momento de las parejas de cilindros que se encuentran en la misma muñequilla están más o menos en el mismo espacio de tiempo. Del mismo modo que en los motores en línea y Boxer, también se ha encontrado este par motor de salida mediante otro método, expuesto en los anexos adjuntos a este documento (3. *Cálculo alternativo del momento del gas*). En él aparece representada esta misma curva, comprobando así el comportamiento real de este modelo.

Para este caso en particular, el par de torsión de inercia, comúnmente denominado de sacudimiento, es nulo para todos sus armónicos. A diferencia de las otras dos configuraciones de 6 cilindros, antes planteadas, su tercer armónico no está en fase, debido al ángulo de la V, por lo que este se cancela. Como explicación, se puede decir que el tercer armónico de un bloque de tres cilindros cancela el efecto del tercer armónico del bloque opuesto. Este es un hecho destacable, ya que presentará menores vibraciones.

Por lo que respecta a los momentos causados por las fuerzas inerciales respecto al cigüeñal, estos han sido descompuestos en los planos horizontal (H) y vertical (V), siguiendo el procedimiento expuesto en punto 8.3.3. *Consideraciones para la simulación*. Estos momentos se han representado, en función de todos los armónicos que intervienen, en ambos planos. En los siguientes dos gráficos aparecen su evolución a lo largo de un ciclo completo:

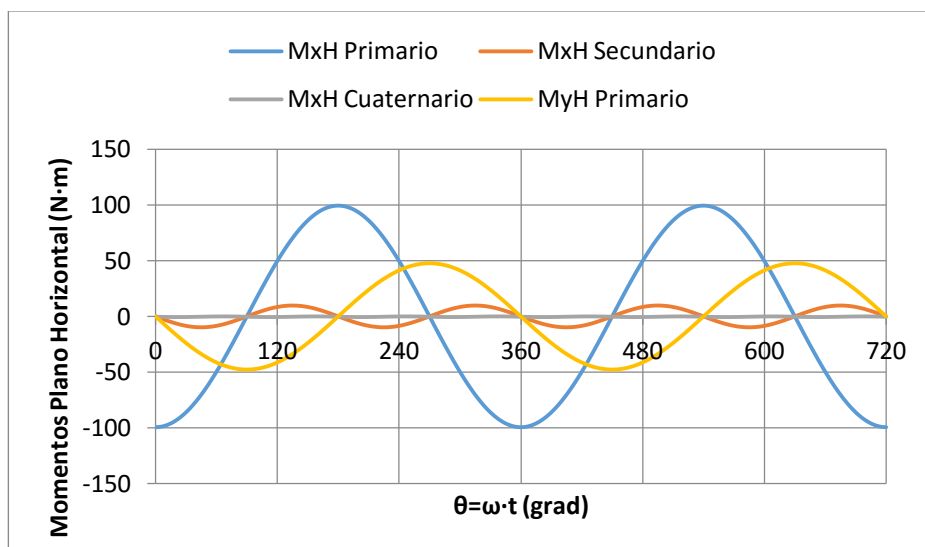


Gráfico 13: Momentos de las fuerzas de inercia en el plano horizontal para una V a 60° y 800 rpm

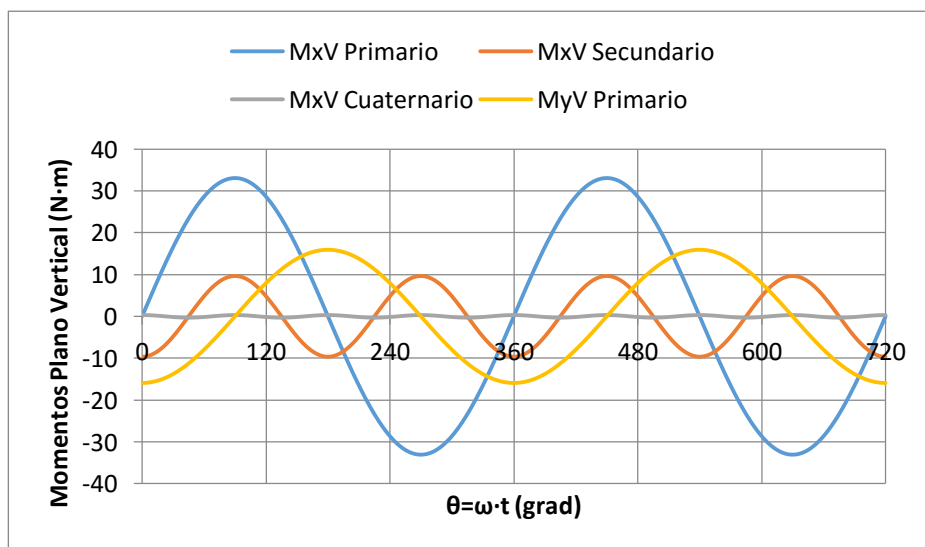


Gráfico 14: Momentos de las fuerzas de inercia en el plano vertical para una V a 60° y 800 rpm

Observando las gráficas, se puede percibir la relevancia de los primeros armónicos respecto al efecto global, llegando a despreciar los armónicos de cuarto orden, en ambos casos. Si se estudia el comportamiento de este modelo trabajando a diferentes velocidades, es lógico pensar cómo las fuerzas de inercia varían en función de este parámetro, los momentos que estas generan también lo harán. Pues bien, esto se ha constatado, ya que al simular estos tres rangos de velocidades se han obtenido gráficas la amplitud de las cuales aumenta en aumentar las revoluciones del motor. Estos momentos son directamente proporcionales a la velocidad angular del cigüeñal. Se ha realizado la suma de todos los armónicos para cada plano y para cada régimen. Para representar este comportamiento se ha graficado lo siguiente:

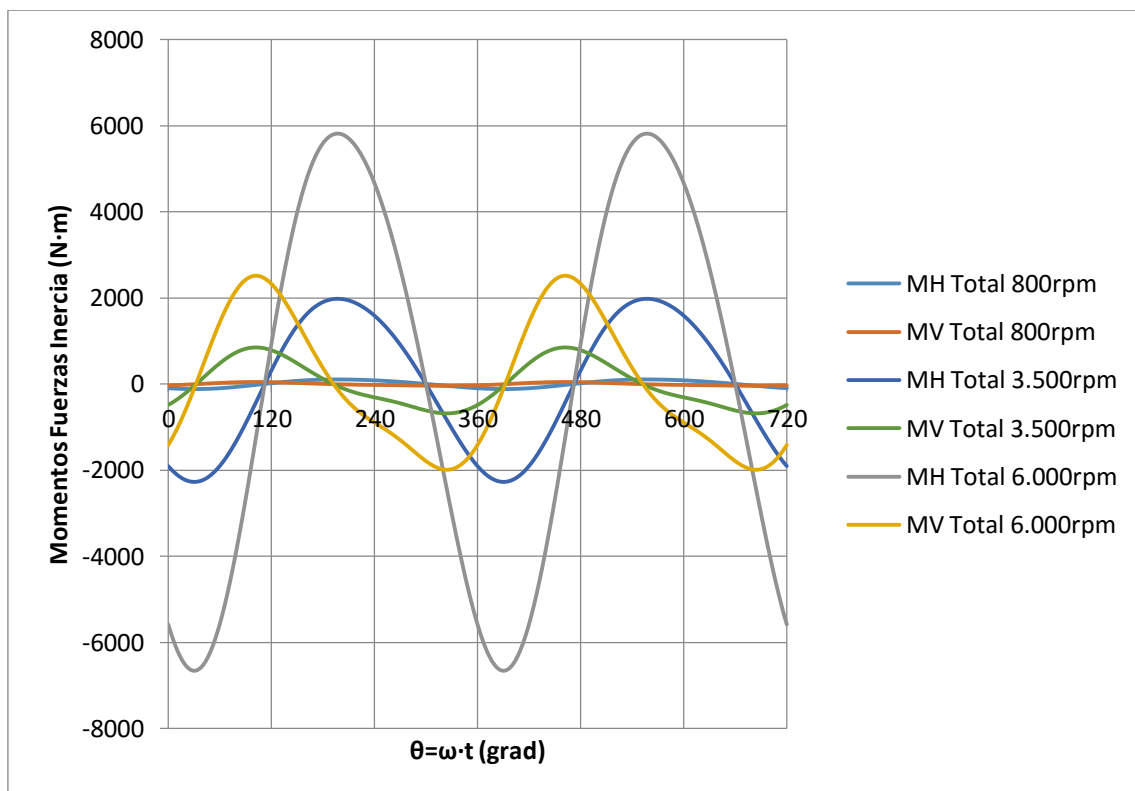


Gráfico 15: Momentos de las fuerzas de inercia de una V a 60°

Se logra ver que girando a 6.000 revoluciones por minuto los momentos, tanto en el plano horizontal como vertical, presentan una mayor magnitud respecto el resto, pudiendo despreciar los efectos de estos momentos a 800 rpm, ya que son casi nulos en comparación. Con este ángulo para la V, el momento que existe en el plano horizontal a 6.000 rpm tiene un pico elevado y un momento en el plano vertical más suavizado, del orden aproximado a los valores que toman estos momentos girando a media potencia.

9.3.2. Ángulo de la V a 90°

Ahora se modifica el ángulo de la V a 90°. Cambiando este parámetro se verán afectados diferentes aspectos, como el momento de ignición de cada cilindro, por lo que los momentos del gas variarán, o la descomposición en los nuevos ejes que depende de este mismo ángulo también lo hará.

Comenzando por las fuerzas de inercia, las producidas en ambas bancadas se cancelan entre ellas, debido a la simetría del modelo. Todos sus armónicos, en ambos ejes, son nulos. Por lo que respecta al momento del gas, al presentar un nuevo desfase de ángulos en la ignición de los cilindros, manteniendo el mismo orden, la curva se verá distinta a la obtenida para 60°. La representación de estos pulsos de potencia queda tal que:

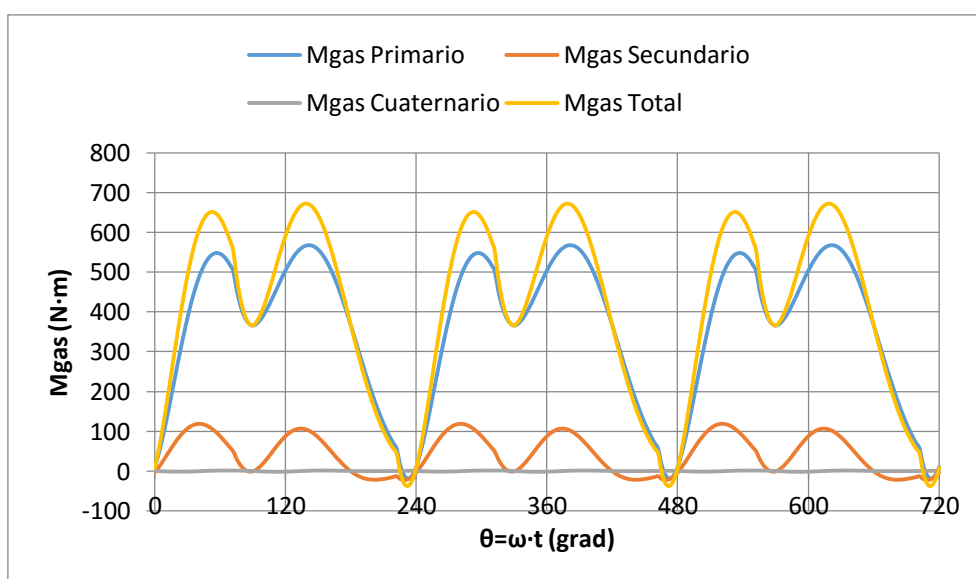


Gráfico 16: Representación de los momentos del gas para una V a 90°

Se puede ver como los picos de momento ahora están más separados, pudiéndolos diferenciar claramente todos ellos. Pero se ve notoriamente como están agrupados en parejas, que representan las explosiones de los cilindros opuestos de la misma muñequilla. Al igual que antes, estas curvas son indiferentes al régimen de giro y también se comprueba su forma en los anexos.

Por el contrario que el modelo anterior, esta V a 90° sí que presenta momento de sacudida. Todos sus armónicos son nulos, excepto el tercero, que no se anula por consecuencia de la bancada opuesta. Al estar en fase, sus magnitudes se suman, y al depender de la velocidad angular resulta que:

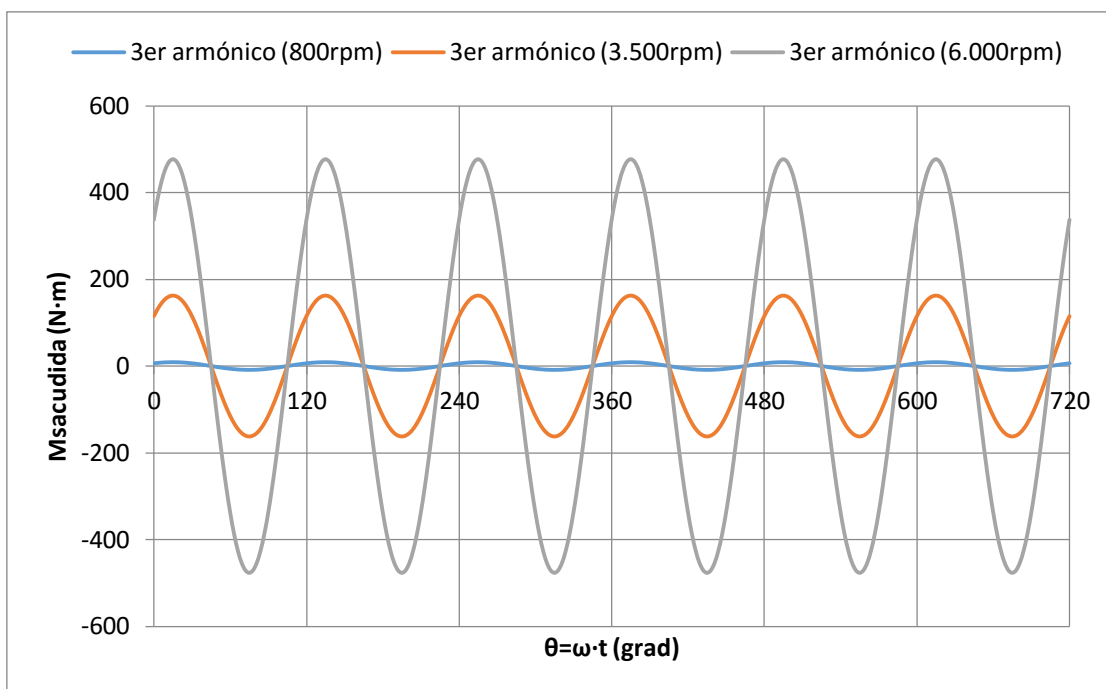


Gráfico 17: Momento de sacudida de un motor 6 cilindros en V a 90°

Por último, destacar los valores que toman los momentos causados por las fuerzas de inercia. Análogamente al apartado anterior, se han representado todos sus armónicos para cada eje. A continuación se adjuntan las gráficas simuladas con 800 rpm. También se han obtenido las otras simulaciones correspondientes a los otros dos regímenes. Todas estas gráficas aparecen en los archivos de Excel adjuntos a este estudio. De las siguientes gráficas se pueden extrapolar los mismos comentarios que se mencionaron para la V a 60°.

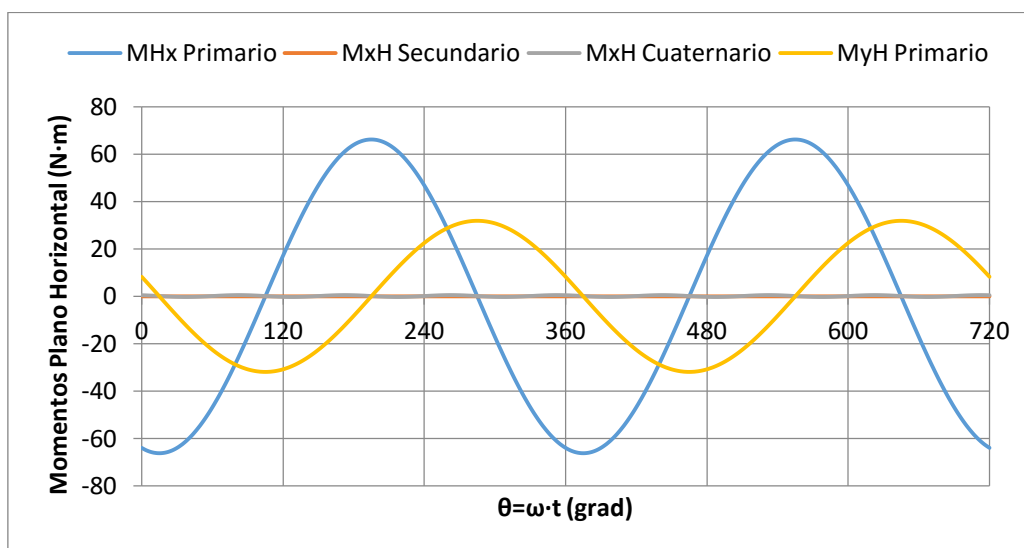


Gráfico 18: Momentos de las fuerzas de inercia en el plano horizontal para una V a 90° y 800 rpm

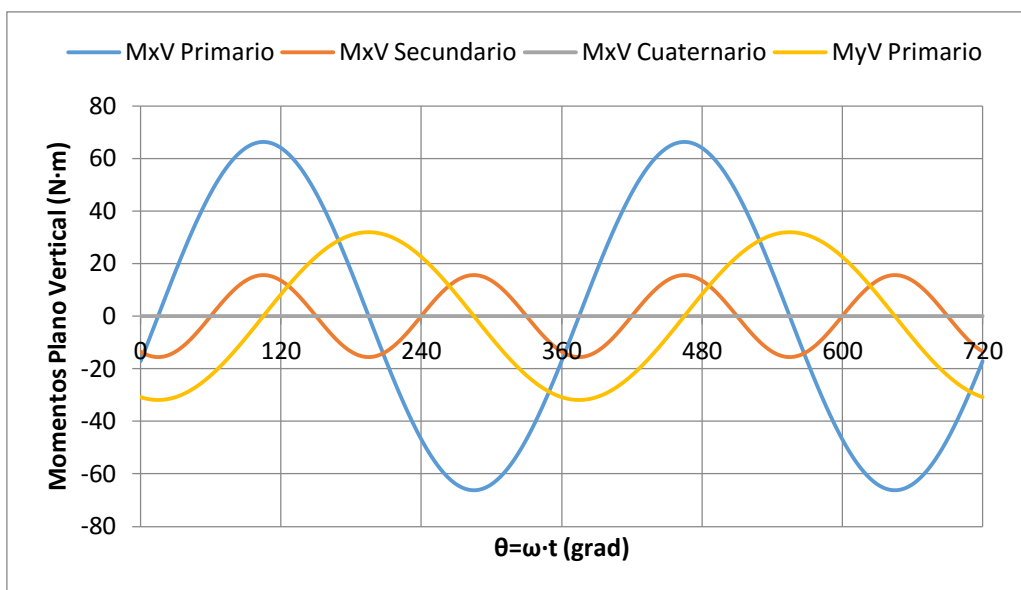


Gráfico 19: Momentos de las fuerzas de inercia en el plano vertical para una V a 90° y 800 rpm

Ambos gráficos muestran la significación de los primeros armónicos respecto al resto, pudiéndose despreciar los de menor orden al compararlos en magnitud. El cómputo global de estos momentos en función de los tres rangos de trabajo simulados es el siguiente:

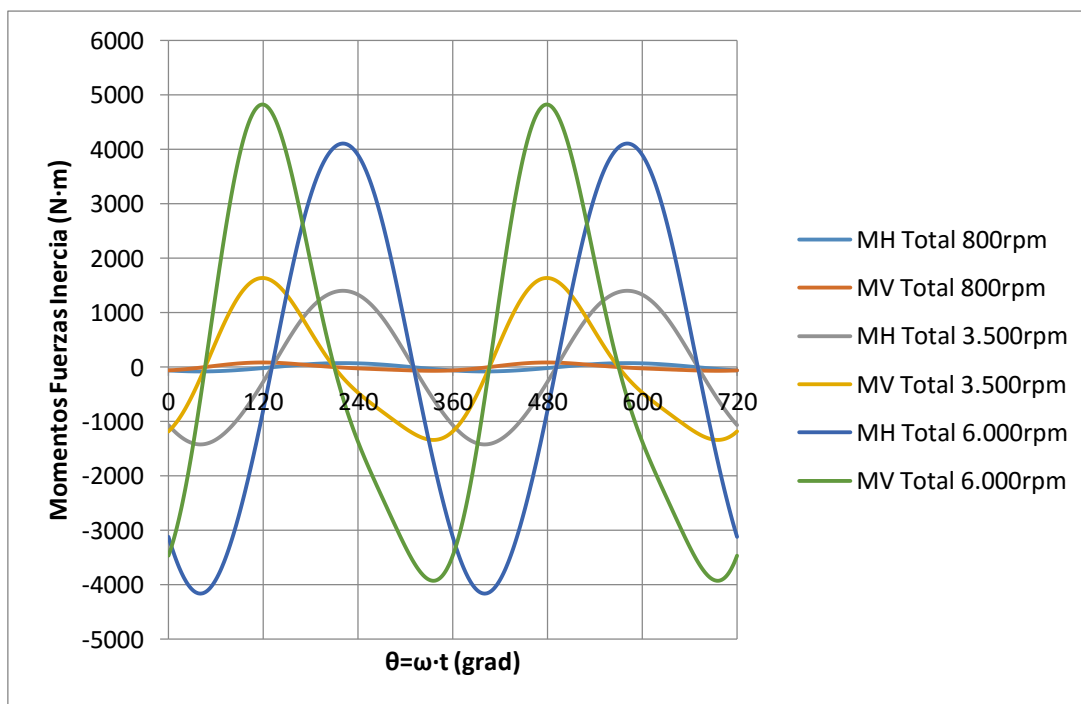


Gráfico 20: Momentos de las fuerzas de inercia de una V a 90°

9.3.3. Ángulo de la V a 120°

Para concluir, se han realizado las mismas simulaciones que antes pero ahora con un ángulo aún mayor; 120°. Teniendo en cuenta que el ángulo de fase entre cilindros es de 120°, ya que se disponen un motor de cuatro tiempos con 6 cilindros, este coincide con el ángulo de la V. Este hecho influenciará en los resultados obtenidos. Las fuerzas inerciales totales de este conjunto son nulas, para todos sus armónicos y ejes. Esta característica se comparte para todos los modelos en V, sea cual sea el ángulo entre bloques.

Los momentos del gas totales vuelven a verse modificados, ya que para esta nueva V el desfase entre explosiones ha variado. Por este motivo se obtiene una nueva curva del momento del gas, donde es más fácil apreciar los seis pulsos de potencia que proporciona. El ángulo de fase entre las tres muñequillas del cigüeñal es 120° y el ángulo entre cilindros opuestos es también de 120°, esto origina una distribución homogénea de las explosiones, o lo que es lo mismo, de los picos de par máximo. Por este motivo, esta gráfica es la misma que la obtenida para el motor en línea y Boxer (*Gráfico 11*).

Referente a los momentos de sacudida, sucede de la misma forma que las otras configuraciones, excepto la V a 60°. Todos sus armónicos quedan cancelados gracias a la simetría, sin embargo el tercer armónico permanece en fase, superponiéndose sus efectos. La representación que se obtiene es la misma que la *Gráfico 10*, pero en este caso para un motor en V a 120°. La razón de esta semejanza vuelve a ser la coincidencia de estos 120°.

Al representar los momentos de sacudida provocados por las fuerzas de inercia a lo largo del cigüeñal, se obtienen dos gráficas, una para cada eje de trabajo, donde aparece la evolución de cada armónico durante un ciclo completo. Los comentarios sobre estas gráficas son semejantes a los ya expuestos, al mostrar el mismo comportamiento.

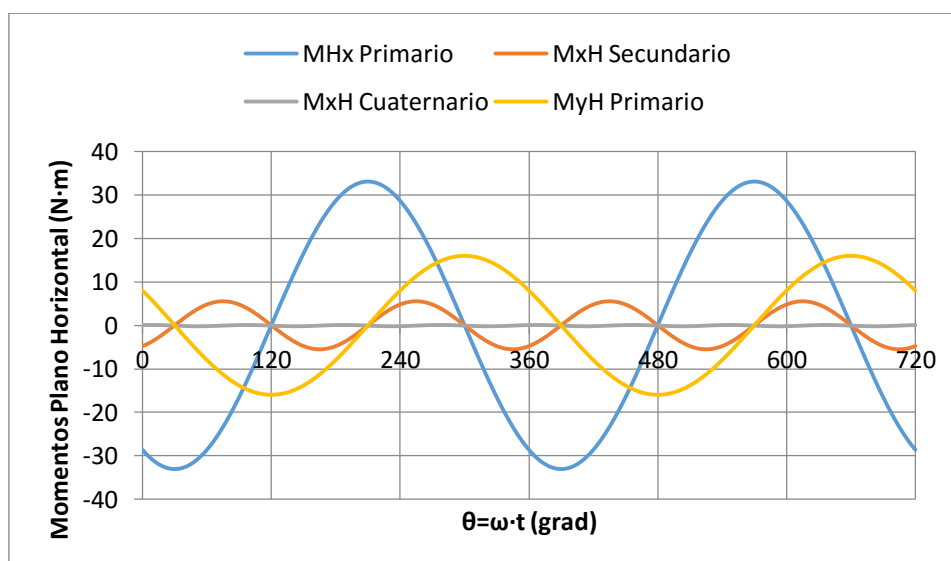


Gráfico 21: Momentos de las fuerzas de inercia en el plano horizontal para una V a 120° y 800 rpm

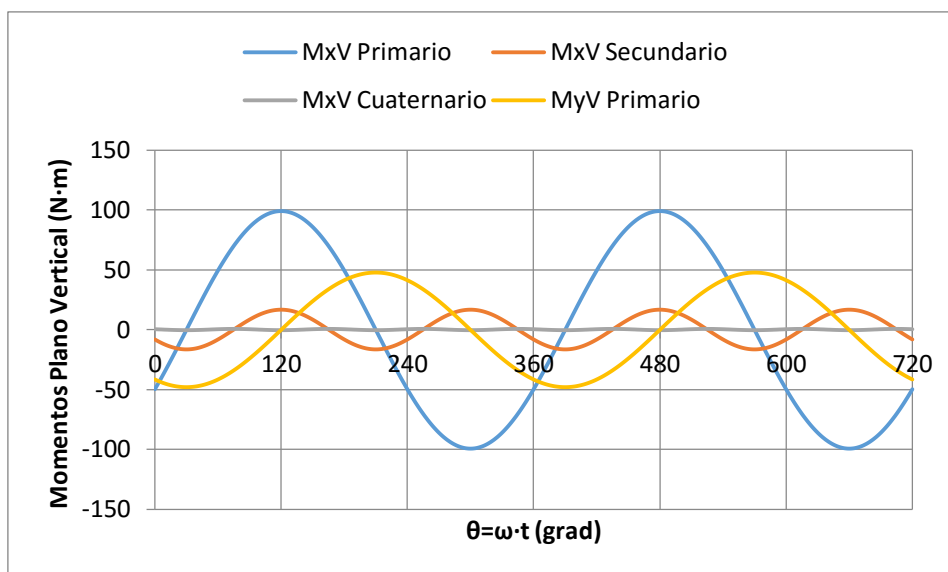


Gráfico 22: Momentos de las fuerzas de inercia en el plano vertical para una V a 120° y 800 rpm

Recuperando las explicaciones antes dadas para los momentos debidos a las fuerzas de inercia, tanto en el eje H como en V, se consigue la siguiente gráfica que muestra el comportamiento global del sistema:

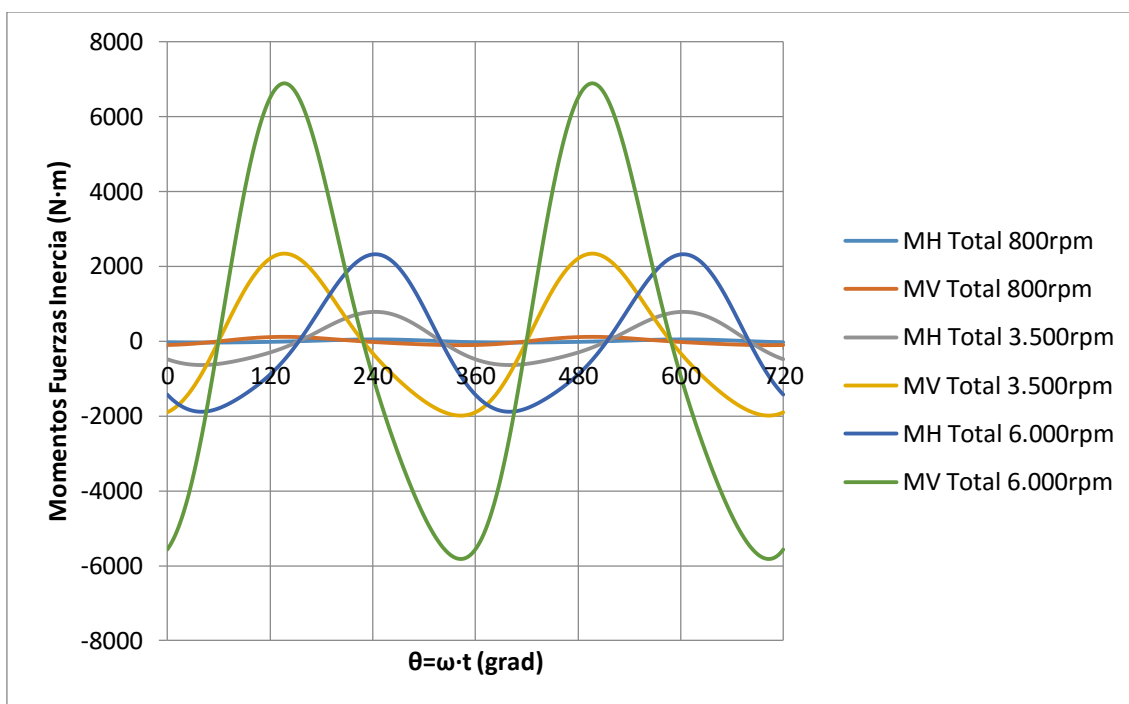


Gráfico 23: Momentos de las fuerzas de inercia de una V a 120°

Esta distribución, en el régimen de ralentí genera unos momentos, no despreciables en magnitud, pero si en comparación a regímenes más altos. A media potencia estos aumentan, pero no tanto respecto cuando trabaja a plena carga. En este instante, los momentos en el eje vertical son considerablemente superiores a los que hay sobre el plano horizontal. El pico que presenta es mayor al compararlo con los resultados de los otros dos ángulos de la V.

9.4. Propuesta del ángulo óptimo de la V

Una de las principales ventajas de los motores en V sobre el resto de distribuciones, siempre comparando con el mismo número de cilindros, es un menor tamaño proporcionando una mayor rigidez. El bloque y el cigüeñal más corto presentan una rigidez mayor, tanto a flexión como torsión. Se puede obtener una longitud de aproximadamente la mitad de un motor en línea, aunque este sea más ancho al tener dos bancadas con sus respectivas distribuciones, siempre y cuando se dispongan dos bielas por muñequilla, como es este caso. Al ser más compacto, permite situarlo transversalmente debajo el capó del vehículo. Pese a las ventajas, también presenta inconvenientes; requiere de un diseño más preciso y complejo, por lo que resulta más costoso a la hora de fabricar.

Primero de todo, comentar el buen equilibrado que presentan los motores de 6 cilindros en línea y Boxer, ya que gracias a su simetría respecto el cigüeñal se consigue cancelar las fuerzas y momentos, causantes del posible desequilibrio del motor.

Ahora ya con los motores de 6 cilindros en V, una vez ya se han expuesto los resultados obtenidos para cada ángulo de la V, se procederá a determinar el ángulo más óptimo posible para la V, desde el punto de vista del equilibrado. La elección de este ángulo es un paso primordial a la hora de diseñar un motor de estas características.

Como concepto, para lograr el balanceo del motor, los efectos de las fuerzas se deben de contrarrestar con otra igual pero de sentido contrario. Este es el objetivo buscado por los diseñadores. Se pretende lograr el equilibrio de las fuerzas de inercia, los momentos de sacudida y las fuerzas de impulso de cada uno de los cilindros.

Con esta configuración en V se consigue equilibrar estas fuerzas de inercia, sea cual sea el ángulo de la V. En contraposición los momentos de sacudida no se cancelan en todos los casos, tan solo en la V a 60° todos los armónicos de este momento son nulos. Para los otros dos casos, con V a 90° y 120°, aparece el término del tercer armónico, antes representado (Gráfico 17 y Gráfico 10, respectivamente) para ambos casos trabajando en los tres regímenes (ralentí, media y alta potencia).

El ángulo de la V es un parámetro de gran influencia respecto al par de salida del motor. Del mismo modo que anteriormente se calculó el ángulo de fase para las configuraciones en línea y Boxer, aquí también tendrá relevancia su valor, el cual permanece invariable ya que se sigue considerando un ciclo de 4T y 6 cilindros.

$$\Delta\phi = \frac{2 \text{ ciclos} * 360^{\circ}}{n_{\text{cilindros}}} = \frac{2 * 360}{6} = 120^{\circ}$$

Este ángulo define los grados más óptimos de la rotación del cigüeñal entre las distintas explosiones en cada uno de los cilindros. Lo que se pretende es tener pulsos de potencia uniformemente repartidos, en incrementos iguales para mejorar el equilibrio. Para el motor de 6 cilindros, se debería disparar un cilindro en cada giro de 120° del cigüeñal. Como consecuencia directa, el motor en línea, el Boxer y en V a 120° comparten esta característica que les otorga un buen equilibrio de los momentos del gas (Gráfico 11).

Pero el motor en V a 60° y 90° no acaban de cumplir esta condición al presentar las curvas del momento del gas distribuidas de otro modo (*Gráfico 12 y Gráfico 16*, respectivamente). Sin embargo, la V a 60° no acaba de ser del todo inadecuada por lo que respecta a este par motor. Estos momentos del gas, fruto de las explosiones, están mejor equilibrados, ya que el ángulo de fase óptimo (120°) es divisible por el de la V (60°) y se consigue un reparto algo más uniforme en forma de tres pulsos algo irregulares. Este fenómeno no sucede con el caso de la V a 90° .

Analizando más detenidamente el motor en V a 90° , la posible inserción de una masa balanceadora permite la eliminación de las fuerzas de inercia y de los momentos de sacudimiento, primarios en ambos casos ya que son los que presentan mayor importancia en el efecto total. A medida que el cigüeñal rota, la masa de balanceo cancela la inercia del avance del un pistón, y 90° después cancela el efecto del otro, tal y como muestra la figura siguiente. Otro beneficio que reporta la eliminación de esta fuerza inercial primaria es que no genera ningún tipo de momento respecto a lo largo del cigüeñal, por lo tanto, una fuente menos de vibraciones. Por este motivo esta configuración es también viable. En los monoplazas de Fórmula 1, por ejemplo, se monta esta distribución gracias a que se consigue balancear el motor introduciendo este contrapeso.

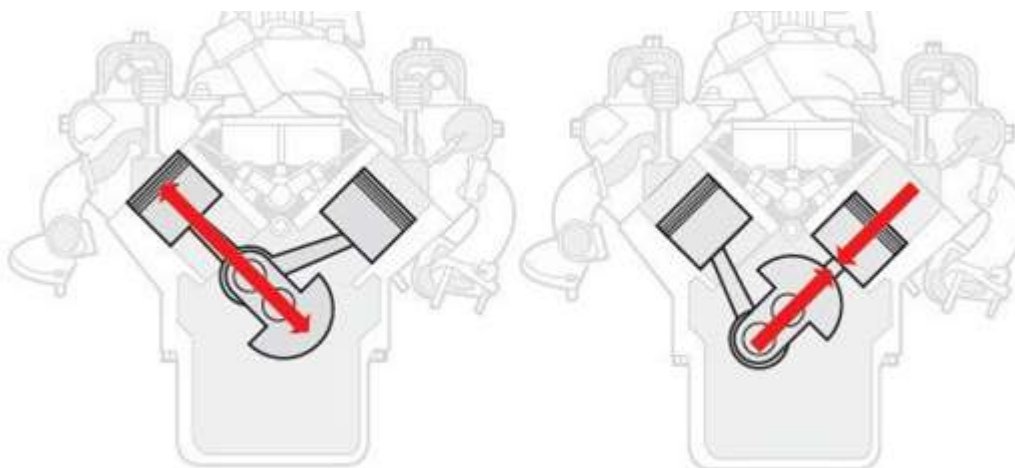


Fig. 30: Motor en V a 90° (<http://www.caranddriver.com/features/the-physics-of-engine-cylinder-bank-angles-feature>)

Pese a que el ángulo de 120° es el más adecuado, por lo que respecta a los momentos del gas, esta distribución en particular no se suele implementar en la realidad debido a que es prácticamente imposible albergar este motor en los vehículos actuales. Su gran envergadura al disponer los bancos de tres cilindros a 120° hace imposible que los fabricantes planteen esta solución, considerando la tendencia dimensional actual de los vehículos de ciudad. Los diseñadores suelen proponer el motor en V a 60° como la mejor solución de compromiso, teniendo en cuenta el equilibrado, las dimensiones y la potencia suministrada.

Pero el motor en V-6 a 60° no está perfectamente equilibrado, ya que no dejan de ser dos motores de tres cilindros unidos en el mismo cigüeñal. Un motor de tres cilindros comporta por sí mismo un sacudimiento inherente al presentar un número impar de cilindros.

Un motor tricilíndrico en línea está intrínsecamente desequilibrado y tenderá a oscilar de un extremo a otro. Al colocar dos bloques de tres cilindros en un ángulo de 60° , se pretende cancelar los efectos de estas fuerzas y momentos que generan cada uno de ellos por separado.

Los momentos de balanceo debidos a las fuerzas inerciales en el eje del cigüeñal no pueden ser cancelados si el ángulo de inclinación de la V es menor de 180° , por lo tanto esta configuración presenta vibraciones inherentes. Este fenómeno sucede de forma análoga para los otros dos ángulos de la V simulados, que presentan momentos en el plano vertical y horizontal.

Como posible solución a estas vibraciones, algunos modelos de V-6 montan ejes equilibrados, que no dejan de ser cigüeñales que usan lóbulos con masas específicas que anulen el desequilibrio.

Tratando ahora estos momentos de sacudimiento, que como se describió se han descompuesto en los planos horizontal y vertical, los tres modelos en V probados presentan valores, en todos sus armónicos, de estos momentos. Para los tres casos, estos momentos aumentan cuanto mayor es el régimen de giro. Para poder comparar este efecto en los tres ángulos, se ha escogido un régimen de trabajo en concreto (3.500 rpm; a medio régimen de potencia) y representado las curvas totales en ambos planos para cada ángulo.

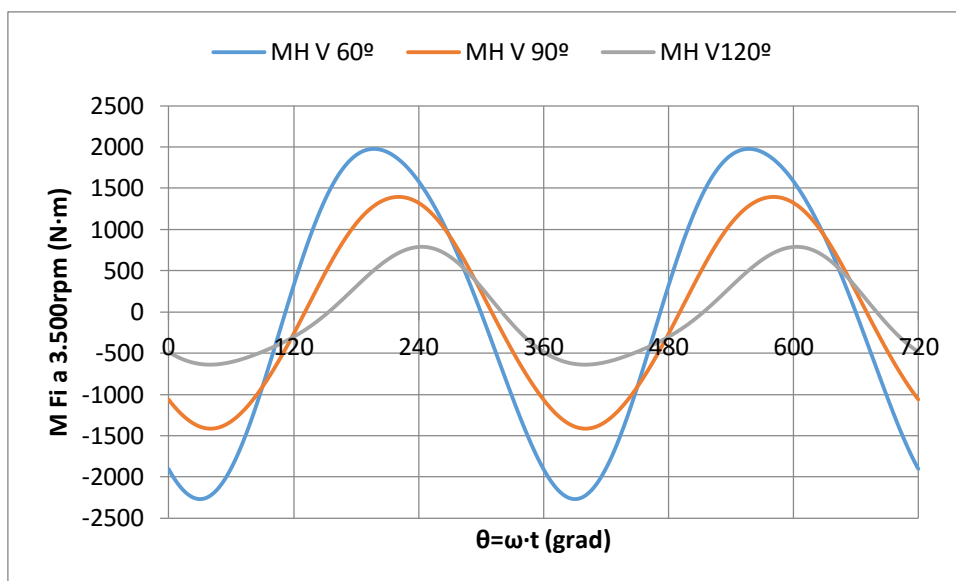


Gráfico 24: Momentos plano horizontal de las fuerzas inerciales a 3.500 rpm

Contemplando este gráfico se tiene que en el caso del plano horizontal del motor en V a 60° presenta la mayor amplitud de todas, por lo que producirá un cabeceo del bloque motor a lo largo del cigüeñal. La disposición que menor momento tiene es a 120° .

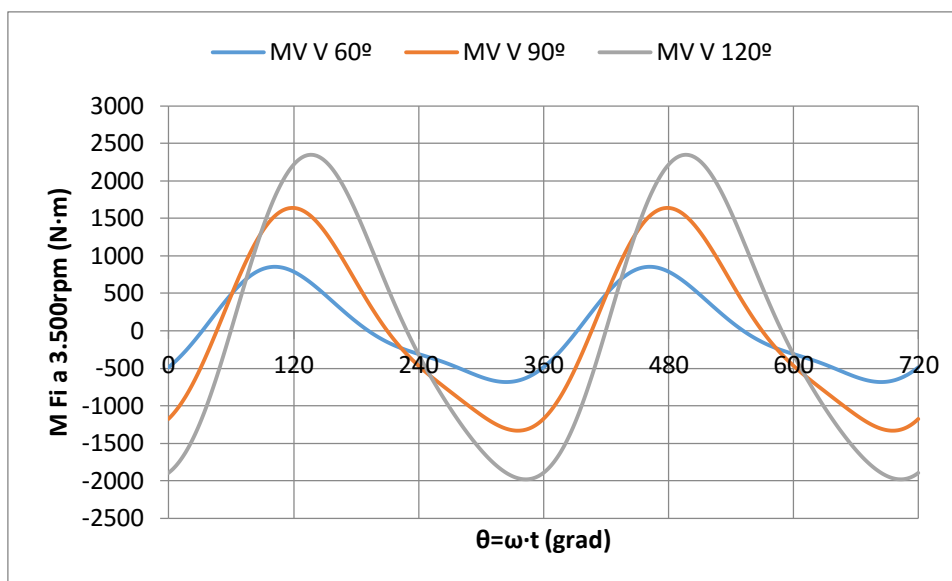


Gráfico 25: Momentos plano vertical de las fuerzas inerciales a 3.500 rpm

Mirando el gráfico del momento vertical, el pico de mayor amplitud se produce para una V de 120°, y el menor para los 60°. Este momento generará un ladeo del bloque motor. Al comparar ambas gráficas, e intentando encontrar la mejor disposición, se pueden descartar los 90°, ya que en los dos casos presenta un valor elevado. Por otro lado, el cabeceo con 120° es el menor de todos, pero genera el mayor ladeo. Al contrario pasa con la V a 60°, por lo que recurriendo a los valores numéricos, el momento vertical con 120° tiene un pico más elevado, del orden de los 2.400 Nm, en comparación al pico elevado del momento horizontal con 60° que es de 2.000 Nm. Finalmente, se opta por una V a 60°, que en promedio genera en menor grado estos momentos y tiene menores dimensiones, tal y como se explicó primeramente.

Como consideraciones adicionales, en caso de tratar con un motor plano en V a 180°, también se podría conseguir un motor muy bien equilibrado, ya que las fuerzas se contrarrestarían con las generadas en el banco en oposición exacta. Por otro lado, al considerar esta configuración con un mayor número de cilindros este ángulo se ve modificado. Por ejemplo, si se trata de 8 cilindros en V el ángulo óptimo para un correcto equilibrado sería de 90° entre ambos bloques motor. En este caso, el ángulo de fase sería 90°, coincidiendo con el ángulo entre bancadas. Esto desencadena en un equilibrado perfecto de los momentos del gas; se produce una explosión cada 90° de giro del cigüeñal. Esta configuración también conseguiría equilibrar las fuerzas y los momentos de inercia. Otro caso curioso, sucede al disponer de un motor de 12 cilindros en V, el cual presenta un equilibrado natural, independientemente del ángulo de su V. Este dispone de dos bloques motores de 6 cilindros ya equilibrados al cancelarse los efectos con el resto de cilindros de la misma bancada.


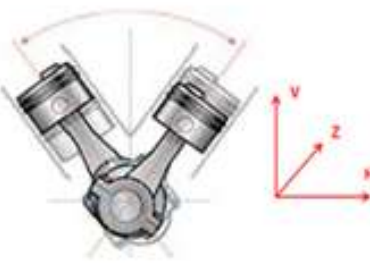
Al equilibrar un motor se pretende encontrar la configuración que genera el mínimo grado de vibraciones, ya sea buscando las masas en los codos del cigüeñal que equilibren el sistema, la cancelación de las fuerzas de inercia y los momentos mediante la distribución más adecuada... Tomando como base este concepto, y todo lo anteriormente expuesto, se puede decir que el ángulo que se acomodará para que los esfuerzos dinámicos sobre el cigüeñal sean lo menor posible es con un ángulo de 60° para la V.

Esta decisión queda en manos del diseñador, que dependiendo del punto de vista que considere oportuno tomará una u otra opción. Considerando la uniformidad de las explosiones, escogería una V a 120° , aportando la mayor regularidad del ángulo de fase. Al presentar los 6 pulsos de potencia claramente diferenciados, desencadenará en una evolución más suave del par motor.

Sin embargo, en el caso que considerara también el espacio que ocuparía cada una de las distribuciones, el diseñador podría escoger una V a 60° , proporcionando una mejor relación equilibrio/espacio. Por otro lado, también podría decidir montar una V a 90° , añadiendo posteriormente el contrapeso correspondiente que anule las fuerzas y momentos primarios, equilibrando sus efectos, pero no los de armónicos superiores.

Con el fin de tener una visión general de los resultados obtenidos, para todas las configuraciones estudiadas, se ha elaborado la siguiente tabla, donde aparecen todos los términos calculados y los valores que se han encontrado, ya sean nulos o bien quedan representados en los gráficos antes expuestos:

Tabla 10: Cuadro resumen de los resultados de las simulaciones

6 CILINDROS		LÍNEA	BOXER	V 60°	V 90°	V 120°
FixP		0	0	0	0	0
FixS		0	0	0	0	0
FixC		0	0	0	0	0
FiyP		0	0	0	0	0
MgP		Gráfico 11		Gráfico 12	Gráfico 16	Gráfico 11
MgS						
MgC						
MsP		0	0	0	0	0
MsS		0	0	0	0	0
MsT		Gráfico 10		0	Gráfico 17	Gráfico 10
MsC		0	0	0	0	0
MsQ		0	0	0	0	0
Plano H	M_FixP	0	0	Gráfico 13	Gráfico 18	Gráfico 21
	M_FixS	0	0			
	M_FixC	0	0			
	M_FiyP	0	0			
Plano V	M_FixP	0	0	Gráfico 14	Gráfico 19	Gráfico 22
	M_FixS	0	0			
	M_FixC	0	0			
	M_FiyP	0	0			
Disposición						

10. Posibles desarrollos futuros

Una vez llegado al punto final de este estudio sobre el desequilibrio de motores, cabe destacar los posibles pasos que le sucederían. A partir de aquí, existe un amplio abanico de estudios o proyectos posteriores que tomen como punto de partida el trabajo aquí expuesto.

Las hojas de cálculo obtenidas con Excel tienen el potencial de poder desarrollar nuevas simulaciones, actualizando el valor de los parámetros en cuestión. Es decir, que disponiendo de las medidas de los componentes de otro motor y algunas de sus características principales, si se introdujeran los nuevos valores en las hojas, se puede llegar a obtener el comportamiento de este motor en concreto. Esto permitiría al usuario conocer las fuerzas y los momentos que se generan en esta configuración en particular, ya sea en línea, en Boxer como en V.

Mencionar también, que estas simulaciones se han realizado para un número concreto de cilindros, en este caso de 6, pero que en un trabajo posterior se podrá llegar a simular con un número diferente de cilindros, como 4 o 8 cilindros. Tan solo sería necesario realizar los cambios pertinentes para cada distribución, pero la base de trabajo sería sobre los mismos conceptos, aprovechando las expresiones ya calculadas.

Otro posible camino a seguir, sería realizar un pequeño programa que permitiera encontrar tanto fuerzas como pares basándose en los cálculos aquí expuestos. Sería algo semejante al programa ENGINE, con el que se ha encontrado la curva de la fuerza del gas, pero incluyendo una mayor precisión en los cálculos al trabajar hasta el quinto armónico.

Además, en este estudio se han obviado todos los aspectos térmicos relacionados con la combustión dentro de la cámara del cilindro, debido a su complejidad. Por lo que sería interesante realizar un estudio sobre estas explosiones, la fuerza que suministran y bajo qué condiciones.

Durante todo el estudio se ha hablado de las fuerzas y los pares que producen vibraciones o esfuerzos sobre los elementos del motor. Por este motivo, sería de interés llegar a comprender como afectan estas vibraciones al bloque motor.

Mirando con perspectiva este trabajo, se podría llevar a cabo una simulación numérica del sistema multifísico. Esto pretende estudiar desde el punto de vista de la ingeniería, el comportamiento de este mecanismo, ya que integra diferentes campos como la mecánica, la transferencia de calor, termodinámica, movimiento de fluidos, etc. Tomando el software COMSOL Multiphysics de Addlink, por ejemplo, ya que es uno de los mejores programas sobre prestaciones multifísicas, se podría realizar el estudio del comportamiento global de un motor. A partir de un sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales se lograría modelar cualquier comportamiento. Esta es una herramienta muy potente con infinidad de posibilidades.

11. Aspectos medioambientales

Durante el desarrollo de este estudio no se han generado ningún tipo de emisión contaminante directa hacia el medio ambiente, ya sea a nivel de humos como de fluidos tóxicos. No se ha realizado ningún tipo de montaje o prototipo, sobre el cual detallar el impacto medioambiental que causa. Tampoco se han generado residuos que tengan que ser reciclados.

Indirectamente, para la realización de este trabajo sí que se han generado emisiones derivadas del uso energía eléctrica, consumida por los dispositivos electrónicos usados. Para la producción de electricidad se le asocia un impacto en forma de emisión de gases.

Otra posible fuente de emisión de gases contaminantes proviene del vehículo usado para los desplazamientos, del hogar al lugar de trabajo. Su efecto ha sido obviado, ya que dichos desplazamientos tenían lugar para realizar otras tareas.

Importante mencionar el efecto neutro sobre el medioambiente de este estudio, al realizar todo el análisis en forma de simulaciones, y no experimentalmente. Además, una reducción de las vibraciones del motor podría llegar a reducir el consumo de combustible, en la medida correspondiente, debido a que no se perdería energía en forma de vibraciones pudiendo aprovecharla toda para el desplazamiento del vehículo.

A continuación se detallará en una tabla el desglose de estos impactos, en función de los aparatos usados. El tiempo de uso es una estimación considerando las horas totales dedicadas a este trabajo. También se aprovecha para calcular el coste total generado por este consumo eléctrico, el cual aparecerá en el presupuesto. Se ha considerado que el precio actual de la luz es de 0,096 €/kWh.

Tabla 11: Impacto medioambiental

Dispositivo	Tiempo de uso (h)	Potencia (W)	Energía (kW·h)	Factor de emisión (kgCO ₂ /kW·h)	Nivel de CO ₂ equivalente (kgCO ₂)	COSTO (€)
Ordenador Portátil	260	75	19,50	0,267	5,20	1,85
Ordenador Sobremesa	40	250	10	0,267	2,67	0,95
Monitor Ordenador	40	60	2,4	0,267	0,64	0,23
Iluminación	300	30	9	0,267	2,40	0,85
TOTAL	640	415	40,90	-	10,91	3,88

Se obtienen pues unas emisiones totales por valor de 10,91 kgCO₂ equivalente en el desarrollo del estudio.

12. Bibliografía

12.1. Páginas web consultadas

Para la realización de este estudio ha sido necesaria la consulta de diversas páginas web con el fin de recaudar información útil para su desarrollo. Estos enlaces aparecen aquí referenciados por fecha de visita:

Es.wikipedia.org. (2016). *Motor de combustión interna*. [online] Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Motor_de_combusti%C3%B3n_interna [Visitado el 29 Febrero 2016].

Platea.pntic.mec.es. (2016). *Binomio de Newton*. [online] Recuperado de: http://platea.pntic.mec.es/~anunezca/ayudas/newton/binomio_de_newton.htm [Visitado el 12 Marzo 2016].

Es.wikipedia.org. (2016). *Principio de d'Alembert*. [online] Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Principio_de_d%27Alembert [Visitado el 12 Marzo 2016].

Es.wikipedia.org. (2016). *Equilibrado de motores*. [online] Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Equilibrado_de_motores [Visitado el 31 Marzo 2016].

Ontheroadmexico.blogspot.com.es. (2016). *On The Road México: Arquitectura de los motores*. [online] Recuperado de: <http://ontheroadmexico.blogspot.com.es/p/a.html> [Visitado el 4 Abril 2016].

Es.slideshare.net. (2016). *MOTORES 5,6,8 CILINDROS (UIDE) (MCI)*. [online] Recuperado de: <http://es.slideshare.net/andrepaumenasaltos/motores-568-cilindros-uide-mci> [Visitado el 15 Abril 2016].

Es.wikipedia.org. (2016). *Disposición del motor*. [online] Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Disposici%C3%B3n_del_motor#Cilindros_en_oposici.C3.B3n [Visitado el 15 Abril 2016].

Aficionadosalamecanica.net. (2016). *Estudio del motor: arquitectura*. [online] Recuperado de: <http://www.aficionadosalamecanica.net/motor-arquitectura.htm> [Visitado 15 Abril 2016].

Sánchez Pescador, J. (2015). *Simulación dinámica de mecanismos con Autodesk Inventor Professional 2014* [online] Recuperado de: <https://uvadoc.uva.es/bitstream/10324/15445/1/TFG-I-322.pdf> [Visitado el 15 Abril 2016].

Cuidamostucoche.com. (2016). *Motores con cilindros horizontales opuestos - WIKI*. [online] Recuperado de: <https://cuidamostucoche.com/wiki/Motores+con+cilindros+horizontales+opuestos> [Visitado el 7 Mayo 2016].

Fidalgo, R. (2015). *motores bóxer subaru Archivos - Rubén Fidalgo*. [online] Rubén Fidalgo. Recuperado de: <http://rubenfidalgo.com/tag/motores-boxer-subaru/> [Visitado el 7 Mayo 2016].

- Es.wikipedia.org. (2016). *Motor bóxer*. [online] Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Motor_b%C3%B3xer [Visitado el 31 Mayo 2016].
- Wikipedia. (2016). *V6 engine*. [online] Recuperado de: https://en.wikipedia.org/wiki/V6_engine [Visitado el 22 Mayo 2016].
- Caranddriver.com. (2016). *The Physics of: Engine Cylinder-Bank Angles - Feature*. [online] Recuperado de: <http://www.caranddriver.com/features/the-physics-of-engine-cylinder-bank-angles-feature> [Visitado el 22 Mayo 2016].
- Cuidamostucoche.com. (2016). *Motores con cilindros en V - WIKI*. [online] Recuperado de: <https://cuidamostucoche.com/wiki/Motores+con+cilindros+en+V> [Visitado el 22 Mayo 2016].
- Es.wikipedia.org. (2016). *Motor V6*. [online] Recuperado de: https://es.wikipedia.org/wiki/Motor_V6 [Visitado el 22 Mayo 2016].
- Anónimo, (2016). [online] Recuperado de: <http://www.tecnopedroches.hostoi.com/apuntes/catedra.pdf> [Visitado el 29 Mayo 2016].
- Anónimo, (2016). [online] Recuperado de: http://eps-online.es/pdfs/equilibrado_motores.pdf [Visitado el 31 Mayo 2016].
- Addlink.es. (2016). *Software: COMSOL Multiphysics 5.2*. [online] Recuperado de: <https://www.addlink.es/productos/software/comsol-multiphysics> [Visitado el 9 Junio 2016].

12.2. Libros consultados



L. Norton, R. (2005). *Diseño de Maquinaria*. 3rd ed. Mc Graw Hill.

Con el fin de extraer las figuras a partir de las cuales se desarrollan la mayoría de cálculos se ha consultado el siguiente enlace del libro antes mencionado:

Dim.usal.es. (2015). *thermodynamics | Diseño de Maquinaria, Cuarta Edición, por Norton. De McGraw Hill*. [online] Recuperado de: <http://dim.usal.es/eps/mmt/?p=3422> [Visitado el 1 Abril 2016].

Apuntes de la asignatura: “*Motores y transmisión*” Mención en automóviles, año 2016. Grado en Tecnologías Industriales, ETSEIAT.

Apuntes de la asignatura: “*Mechanical design and manufacturing*” Mención en automóviles, año 2016. Grado en Tecnologías Industriales, ETSEIAT.

Apuntes de la asignatura: “*Ciencias y Tecnologías del Medio Ambiente*”, año 2015/16. Grado en Tecnologías Industriales, ETSEIAT.

Apuntes de la asignatura: “*Proyectos*”, año 2015/16. Grado en Tecnologías Industriales, ETSEIAT.





DOCUMENTO 2

ANEXOS

1. Expresiones exactas

Entre los archivos adjuntos a este documento, se encuentra un archivo denominado *Cálculo de las expresiones* con la extensión *.mw* (archivo elaborado con el programa de cálculo Maple). En este quedan desarrolladas todas las fórmulas obtenidas para encontrar las diferentes fuerzas y momentos necesarios para llevar a cabo este estudio.

Dentro de él se detalla todo el proceso seguido, así como las explicaciones necesarias para una interpretación correcta del procedimiento. Tal y como se hace referencia a este apartado a lo largo del *Documento 1 Memoria*, los pasos intermedios para llegar a las expresiones allí escritas se encuentran en este archivo de Maple.

2. Validación de la precisión de las expresiones

Una vez se han elaborado todas las expresiones que conforman la base teórica de este estudio con la herramienta de trabajo Maple, será necesario establecer la veracidad de estas ecuaciones respecto al comportamiento real.

Debido al hecho que durante la elaboración de las ecuaciones finales, se han introducido expansiones del binomio de Newton, habrá ciertas discrepancias entre los valores reales y los aproximados. Este apartado se ha realizado con la finalidad de cuantificar esta discrepancia, es decir, el error cometido al tomar las expresiones aproximadas.

En el desarrollo, la fuente de error viene dada justo después de substituir, en la expresión que lo necesite, uno o varios binomios de Newton. El primer origen de error es el punto donde se trunca esta expansión binomial, es decir, hasta que término de la fórmula se toma. En este caso, se ha realizado hasta el quinto término, asegurando así una precisión suficiente para estos cálculos. Estas expresiones donde se han substituido los binomios quedan nombradas bajo el subíndice *aprox*.

Por otro lado, se encuentra la otra posible fuente de error; la cual deriva de truncar de nuevo la expresión obtenida después de la sustitución binomial. Estas expresiones quedan en función de diferentes múltiplos del ángulo con el que se trabaja. Para este estudio, se trabajan con los términos de hasta quinto orden, este mismo incluido.

Por este motivo es necesario corroborar la veracidad de las ecuaciones finales planteadas, cuantificar el error que se comete respecto al comportamiento real del sistema. Para esta tarea se realiza un sencillo procedimiento, donde se representan estas funciones a lo largo de un ciclo completo. Para obtener la variación respecto a las ecuaciones exactas, se realiza la resta de estas funciones, representándolas en los mismos ejes que antes.

De este modo, se logra una visualización rápida del error cometido a lo largo de todo el ciclo. En los archivos adjuntos a este estudio se encuentra un documento de Maple donde quedan representadas todas estas funciones (*Validación.mw*). En él también aparecen anotaciones que explican el procedimiento seguido y las expresiones en las que se ha comprobado el error cometido.

Este análisis básico de la precisión con la que se trabaja permite concluir diciendo que el error cometido en estas simplificaciones queda claramente validado al obtener dicho error inferior al 1%, tomando los términos de quinto orden en las expresiones. Es por tanto, que todo el sistema presentará una elevada veracidad y precisión respecto a sus cálculos.

3. Cálculo alternativo del momento del gas

En las simulaciones se calcula bajo el nombre de momento del gas. Este es un procedimiento alternativo para calcular este mismo momento pero por otra vía. Se introduce una nueva columna en las hojas de simulación para estas configuraciones multicilíndricas. Se le denominará como momento motor (M_{motor}), este no deja de ser el par de salida del cigüeñal que el motor proporciona. La expresión que define este momento, tomando como base el Principio de Trabajos Virtuales, viene dada por:

$$M_{motor} \cdot \omega = F_{gas} \cdot V_{pistón}$$

siendo M_{motor} , el par que se pretende encontrar, ω la velocidad angular de giro del cigüeñal, F_{gas} la fuerza que suministra la expansión de los gases durante su combustión, y por último, $V_{pistón}$ que es la velocidad lineal que lleva el pistón. Con su representación se consigue observar como variará el par motor de salida que suministra cada distribución, para poder comparar su estabilidad en cada caso. De este modo se verán las fluctuaciones de par a lo largo de un ciclo completo.

Debido a la no uniformidad de la combustión, este fenómeno no es sencillo a la hora de trabajar con él, ya que se deben considerar diversos aspectos térmicos y volumétricos. Como consecuencia, se partirá de los datos experimentales obtenidos del programa, antes ya mencionado, ENGINE del autor del libro Robert L. Norton. Visualizando la fórmula anterior sobre el momento motor, se tomarán los valores de la fuerza de gas de cada cilindro, teniendo en cuenta su orden de encendido particular para cada configuración, y se multiplicará por la velocidad del pistón. Esta velocidad queda definida en el documento anexo denominado *Cálculo de las expresiones.mw*. Para garantizar un nivel elevado de precisión se tomará la expresión completa de la velocidad del pistón sin simplificaciones mediante el binomio de Newton:

$$v = -r \sin(\theta) \omega - \frac{r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \omega}{l \sqrt{1 - \frac{r^2 \sin^2(\theta)}{l^2}}} :$$

Si se observa con detenimiento la definición de la velocidad del pistón, esta está multiplicada por la velocidad angular. Al encontrarse la misma variable a ambos lados del igual, la velocidad angular se simplifica en la igualdad anterior. Esta expresión se introduce en una nueva columna de cada uno de los libros, para cada uno de los cilindros. Finalmente, se encontrará un resultado experimental del momento de salida proporcionado sumando estas columnas en la hoja de *Resultados*.

Como comentarios, es importante esclarecer que para cada distribución de cilindros, en línea y Boxer, se obtendrá la misma representación del momento del gas particular para cada configuración. Al ser independiente de la ω , no variará para los regímenes simulados para cada distribución.

Las gráficas ideales que se han encontrado para cada configuración se detallan a continuación. Para cada una de las distribuciones se mantienen iguales, independientemente de la velocidad angular para cada caso.

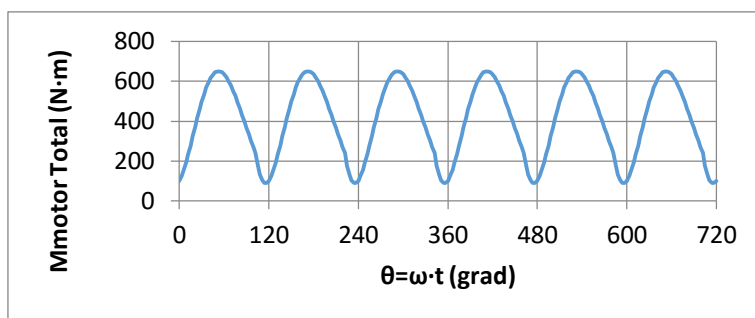


Gráfico 26: Representación del par motor para un motor de 6 cilindros en línea y Boxer

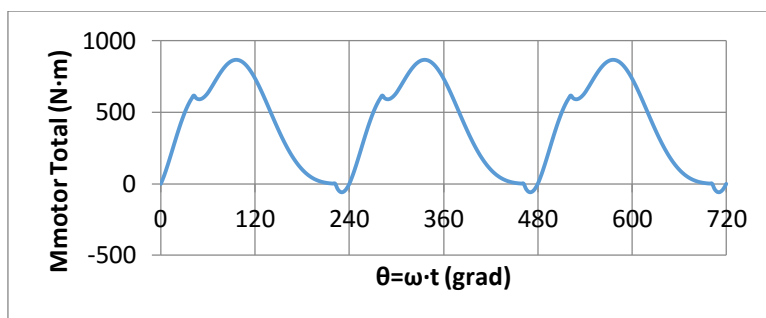


Gráfico 27: Representación del par motor para un motor de 6 cilindros en V a 60°

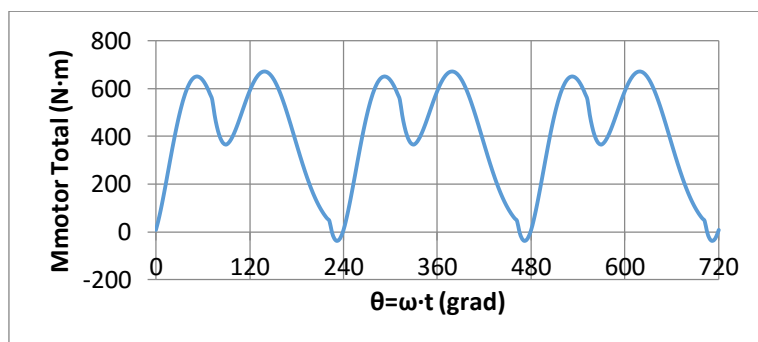


Gráfico 28: Representación del par motor para un motor de 6 cilindros en V a 90°

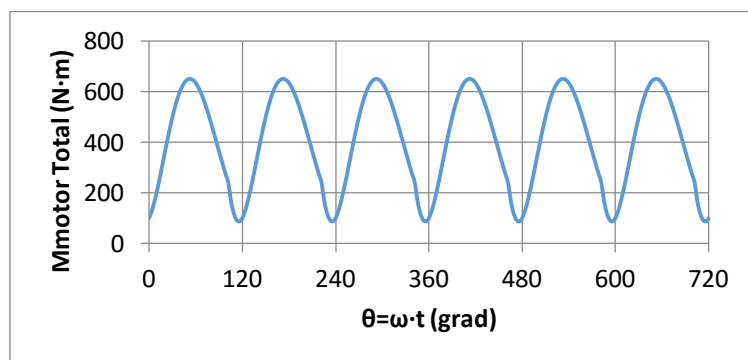


Gráfico 29: Representación del par motor para un motor de 6 cilindros en V a 120°

4. Hojas de cálculo con Excel para las simulaciones

4.1. Simulación numérica de un cilindro

Junto a este documento que engloba la memoria y los anexos del estudio, aparecen adjuntas unas hojas de cálculo con Excel. La simulación numérica del monocilindro aparece detallada en el documento *SimMono.xlsx*. En ella se puede ver las tablas con los valores, las expresiones introducidas que definen cada componente de cada fuerza y par. Además aparecen las gráficas de estas expresiones. Cada hoja de este libro, lleva como nombre el valor de la velocidad angular con la que opera. Finalmente, la última hoja, detalla las comprobaciones de los componentes totales para cada régimen de funcionamiento.

Para obtener el gráfico sobre la cinemática del mecanismo, se pueden observar las expresiones de la posición, velocidad y tiempo en el libro de Excel llamado *Cinemática.xlsx*.

4.2. Simulación de 6 cilindros en línea

Para esta configuración del motor hay tres archivos de Excel que corresponden a este montaje funcionando a tres regímenes de vuelta distintos. Estos aparecen en una carpeta con el nombre de *6 Línea*, y en el título de cada uno de los documentos aparece dicha velocidad.

4.3. Simulación de 6 cilindros opuestos o Boxer

Para esta configuración diferente del motor también hay tres archivos de Excel que corresponden a este montaje funcionando a tres regímenes de vuelta distintos. Estos aparecen en una carpeta con el nombre de *6 Boxer*, y en el título de cada uno de los documentos aparece dicha velocidad.

4.4. Simulación de 6 cilindros en V

Para esta configuración del motor hay tres subcarpetas dentro de una llamada *6 V*. Estas carpetas son para cada uno de los distintos ángulos de la V ensayados. A su vez, dentro de cada una de ellas aparecerán los archivos de Excel con cada una de las mismas tras velocidades de giro del cigüeñal que las anteriormente mencionadas.

